Основные формулы теории вероятностей

Сводный справочный материал раздела «Теория вероятностей»

Часть первая. Случайные события http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html

1. Классическое определение вероятности

Вероятностью наступления события A в некотором испытании называют отношение $P(A)=\frac{m}{n}$, где n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, а m – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

2. Геометрическое определение вероятности

Вероятность наступления события A в испытании равна отношению

$P(A)=\frac{g}{G}$, где G – геометрическая мера (длина, площадь, объем), выражающая общее число всех возможных и равновозможных исходов данного испытания, а g – мера, выражающая количество благоприятствующих событию A исходов.

3. Статистическое определение вероятности

Вероятность наступления некоторого события A – есть относительная частота

$W(A)=\frac{m}{n}$, где n – общее число фактически проведённых испытаний, а m – число испытаний, в которых появилось событие A.

4. Полная группа событий

Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n)=1$

5. Теорема сложения вероятностей противоположных событий

Сумма вероятностей противоположных событий $A, \overline{A}$ равна единице:

$P(A)+P(\overline{A})=1$

7. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления одного из двух несовместных событий A или B (без разницы какого), равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

Аналогичный факт справедлив и для бОльшего количества несовместных событий, например, для трёх:

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$

8. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность появления *хотя бы одного* из двух совместных событий A, B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

9. Теорема умножения вероятностей независимых событий

Вероятность совместного появления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:
$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Данный факт справедлив и для бОльшего количества событий, например, для трёх:
$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

10. Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного события на условную вероятность другого события:
$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$, где $P_A(B)$ – вероятность появления события B при условии, что событие A уже произошло.

Данный факт справедлив и для бОльшего количества событий, например, для трёх:
$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$, где $P_{AB}(C)$ – вероятность появления события C при условии, что события A и B уже произошли.

11. Формула полной вероятности

Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, B_3, \ ..., B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие условные вероятности события A:
$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$

12. Формулы Байеса

Пусть в результате осуществления одной из гипотез $B_1, B_2, B_3, .., B_n$ событие A произошло. Тогда:

$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_1;

$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_2;

$P_A(B_3) = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_3;

…

$P_A(B_n) = \frac{P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_n.

13. Формула Бернулли

$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, где:

n – количество независимых испытаний;
p – вероятность появления события A в каждом испытании и $q = 1 - p$ – непоявления;
P_n^m – вероятность того, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз.
(C_n^m – биномиальный коэффициент)

14. Формула Пуассона

$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$, где:

n – количество независимых испытаний;
p – вероятность появления события A в каждом испытании;
P_m – вероятность того, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз,
при этом количество испытаний должно быть достаточно велико *(сотни, тысячи и больше)*, а вероятность появления события в каждом испытании весьма мала *(сотые, тысячные и меньше)*, в противном случае приближение к точному результату P_n^m (см. п. 13) будет плохим.

15. Локальная теорема Лапласа

Пусть проводится достаточно большое (> 50-100) количество n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p. Тогда вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие A наступит ровно m раз, приближённо равна:

$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса, а $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ $(q = 1 - p)$.

Значения функции Гаусса можно найти напрямую, с помощью таблицы либо в MS Excel.

Теорема обеспечивает хорошее приближение к точному результату P_n^m (см. п. 13) при условии $npq > 10$ *(*≈ 10*)*, в противном случае значение $P_n(m)$ будет далеко от истины.

16. Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность p появления случайного события A в каждом независимом испытании постоянна, то вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит не менее m_1 и не более m_2 раз, приближённо равна:

$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где:

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$

Значения функции Лапласа можно найти с помощью таблицы либо в MS Excel.

Теорема применима при тех же условиях: количество испытаний должно быть достаточно велико ($n > 50$-100) и произведение $npq > 10$ *(*≈ 10*)*. В противном случае точность приближения будет неудовлетворительной.

Точное значение можно рассчитать по формуле:
$P_n(m_1 \le m \le m_2) = P_n^{m_1} + P_n^{m_1+1} + P_n^{m_1+2} + ... + P_n^{m_2-1} + P_n^{m_2}$, где $P_n^{m_i} = C_n^{m_i} p^{m_i} q^{n-m_i}$ (см. п. 13)

17. Математическое ожидание

а) дискретной случайной величины:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \text{, где:}$$

x_i – все возможные значения случайной величины и p_i – соответствующие вероятности.

б) непрерывной случайной величины:

$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, где $f(x)$ – функция плотности распределения этой случайной величины.

18. Свойства математического ожидания

$M(C) = C$ – математическое ожидание константы равно этой константе.

$M(CX) = CM(X)$ – постоянный множитель можно вынести за знак матожидания.

$M(X+Y) = M(X) + M(Y)$ – матожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

Для независимых случайных величин справедливо свойство:
$M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$

19. Дисперсия

$D(X) = M\left[(X - M(X))^2\right]$ – есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания.

а) Дисперсию дискретной случайной величины можно рассчитать по определению:

$$D(X) = M\left[(X - M(X))^2\right] = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + ... + (x_n - M(X))^2 p_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i$$

либо по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$, где $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$

б) и аналогичные способы для непрерывной случайной величины:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx \text{ либо } D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 \text{, где } M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

20. Свойства дисперсии

$D(C) = 0$ – дисперсия постоянной величины равна нулю.

$D(CX) = C^2 D(X)$ – константу можно вынести за знак дисперсии, возведя её в квадрат.

$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\operatorname{cov}(X;Y)$, где $\operatorname{cov}(X;Y)$ – коэффициент ковариации *(см. ниже)* случайных величин X, Y. Если случайные величины независимы, то $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

и для независимых случайных величин:
$D(X - Y) = D(X + (-Y)) = D(X) + D(-1 \cdot Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y)$

21. Среднее квадратическое (стандартное) отклонение

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

22. Вероятность того, что случайная величина X примет значение из промежутка $P(a < X < b), P(a \le X < b), P(a < X \le b)$ либо $P(a \le X \le b)$ рассчитывается по формуле*:

$F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – функция распределения данной случайной величины.

* *Если хотя бы одно из значений a, b «попадает» в точку разрыва функции $F(x)$ дискретной случайной величины, то формулу можно использовать лишь для неравенства $P(a \le X < b)$.*

Для непрерывной случайной величины эти вероятности можно найти и другим способом – с помощью интеграла $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – функция плотности распределения.

23. Распространённые виды распределений и их числовые характеристики

а) дискретные:

Название распределения	Формула расчёта вероятностей	Возможные значения m	Математическое ожидание	Дисперсия
Биномиальное	$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$	$0, 1, 2, 3, ..., n$	np	npq
Пуассона	$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$	$0, 1, 2, 3, ..., n, ...$	λ	λ
Геометрическое	$P_m = q^{m-1} p$	$1, 2, 3, ..., n, ...$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Гипергеометрическое	$P_m = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	$\max(0, M+n-N)$, ..., $\min(M, n)$	$\frac{M}{N} \cdot n$	$\frac{M(N-M)n(N-n)}{N^2(N-1)}$

б) непрерывные:

Название распределения	Функция плотности $f(x) =$	Математическое ожидание	Дисперсия
Равномерное	$\frac{1}{b-a}$ на промежутке от a до b и 0 вне этого промежутка	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
Показательное	$\lambda e^{-\lambda x}$, если $x \ge 0$ и 0, если $x < 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Нормальное	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < +\infty$	a	σ^2

24. Коэффициент ковариации (совместной вариации) случайных величин

$\operatorname{cov}(X;Y) = M\left[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - M(X))(y_j - M(Y))\,p_{ij}$ – математическое ожидание произведения линейных отклонений случайных величин от соответствующих математических ожиданий.

Данный коэффициент удобно вычислять по формуле:

$\operatorname{cov}(X;Y) = M(XY) - M(X) \cdot M(Y)$, где $M(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij}$ для дискретной и

$M(XY) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,dxdy$ – для непрерывной случайной величины.

Значение коэффициента не превосходит по модулю $\left|\operatorname{cov}(X;Y)\right| \le \sqrt{D(X) \cdot D(Y)}$, где $D(X),\, D(Y)$ – дисперсии случайных величин.

Если случайные величины независимы, то $\operatorname{cov}(X;Y) = 0$, обратное в общем случае неверно.

25. Коэффициент линейной корреляции

$r_{xy} = \dfrac{\operatorname{cov}(X;Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$, где $\sigma(X),\, \sigma(Y)$ – стандартные отклонения случайных величин.

Данный коэффициент принимает значения из промежутка $-1 \le r_{xy} \le 1$

26. Неравенство Чебышева

Вероятность того, что отклонение случайной величины X от её математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем:

$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$, где $D(X)$ – дисперсия этой случайной величины.

27. Теорема Чебышева

Если $X_1,\, X_2,\, X_3,\, \ldots,\, X_n$ – попарно независимые случайные величины, причём дисперсии их равномерно ограничены (не превосходят постоянного числа C), то, как бы ни было малО положительное число ε, вероятность неравенства

$\left|\dfrac{X_1 + X_2 + \ \ldots + X_n}{n} - \dfrac{M(X_1) + M(X_2) + \ \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon$ будет сколь угодно близка к единице,

если число случайных величин достаточно велико. Иными словами:

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$