# Основные формулы комбинаторики

## 1) Факториал (произведение всех натуральных чисел от 1 до $n$ включительно)

$1!=1$
$2!=1\cdot 2=2$
$3!=1\cdot 2\cdot 3=6$
$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$
$5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$
$6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720$
$7!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=5040$
...
$(n-1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)$
$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n$
$(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n(n+1)$
...
Кроме того: $0!=1$

## 2) Перестановки, сочетания и размещения без повторений

Участники действий: множество, состоящее из $n$ **различных** объектов *(либо объектов, считающихся в контексте той или иной задачи различными)*

**Формула количества перестановок**: $P_n = n!$

***Типичная смысловая нагрузка***: *«Сколькими способами можно переставить $n$ объектов?»*

**Формула количества сочетаний**: $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$

***Типичная смысловая нагрузка***: *«Сколькими способами можно выбрать $m$ объектов из $n$?». Поскольку выборка проводится из множества, состоящего из $n$ объектов, то справедливо неравенство* $0 \le m \le n$

**Формула количества размещений**: $A_n^m = (n-m+1)\cdot \ldots \cdot (n-1)n$

***Типичная смысловая нагрузка***: *«сколькими способами можно выбрать $m$ объектов (из $n$ объектов)* ***и в каждой*** *выборке переставить их местами (либо распределить между ними какие-нибудь уникальные атрибуты)»*

Исходя из вышесказанного, справедлива следующая формула:

$$C_n^m \cdot P_m = A_n^m$$

И в самом деле:

$$C_n^m \cdot P_m = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}\cdot m! = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-m)(n-m+1)\cdot \ldots \cdot (n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-m)} = (n-m+1)\cdot \ldots \cdot (n-1)n = A_n^m$$

## 3) Бином Ньютона и треугольник Паскаля

Под ***биномом Ньютона*** чаще всего подразумевают формулу возведения двучлена $(a+b)$ в целую неотрицательную степень $n$:

$(a+b)^0 = \mathbf{1}$

$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 b^2 = \mathbf{a^2} + \mathbf{2ab} + \mathbf{b^2}$

$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 b^3 = \mathbf{a^3} + \mathbf{3a^2b} + \mathbf{3ab^2} + \mathbf{b^3}$

$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 b^4 = \mathbf{a^4} + \mathbf{4a^3b} + \mathbf{6a^2b^2} + \mathbf{4ab^3} + \mathbf{b^4}$

$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b^1 + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a^1 b^4 + C_5^5 b^5 = \mathbf{a^5} + \mathbf{5a^4b} + \mathbf{10a^3b^2} + \mathbf{10a^2b^3} + \mathbf{5ab^4} + \mathbf{b^5}$

...

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n =$

...

*Биномиальные коэффициенты* $C_n^m$ можно рассчитать по стандартной формуле (см. пункт 2), но удобнее воспользоваться так называемым ***треугольником Паскаля***, который представляет собой бесконечную таблицу биномиальных коэффициентов. По бокам этого треугольника расположены единицы, а каждое внутреннее число равно сумме двух ближайших верхних чисел *(красные метки)*:

| | |
|---|---|
| 0: | 1 |
| 1: | 1 1 |
| 2: | 1 2 1 |
| 3: | 1 + 3 3 1 |
| 4: | 1 4 6 4 1 |
| 5: | 1 5 10 10 + 5 1 |
| 6: | 1 6 15 20 15 6 1 |
| 7: | 1 7 21 35 + 35 21 7 1 |
| 8: | 1 8 28 56 70 56 28 8 1 |
| 9: | 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1 |
| 10: | 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1 |
| | ............................................ |

Так, например, для возведения двучлена в 6-ю степень следует руководствоваться общей формулой бинома, после чего сразу записать числа из строки № 6 треугольника Паскаля:

$$(a+b)^6 = C_6^0 a^6 + C_6^1 a^5 b^1 + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 a^1 b^5 + C_6^6 b^6 =$$
$$= \mathbf{a^6} + \mathbf{6a^5b} + \mathbf{15a^4b^2} + \mathbf{20a^3b^3} + \mathbf{15a^2b^4} + \mathbf{6ab^5} + \mathbf{b^6}$$

Кроме того, данная таблица позволяет быстро находить отдельно взятые биномиальные коэффициенты (например, в целях проверки вычислений по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$):

$C_6^2$ – находим строку № 6 и ***(внимание!)*** 2 + 1 = 3-й элемент слева *(зелёный кружок)*: $C_6^2 = 15$;

$C_9^5$ – находим строку № 9 и выбираем 5 + 1 = 6-й элемент слева *(малиновый кружок)*: $C_9^5 = 126$;

$C_{10}^3$ – находим строку № 10 и выбираем 3 + 1 = 4-й элемент слева *(коричневый кружок)*: $C_{10}^3 = 120$.

## 4) Комбинаторное правило суммы и комбинаторное правило произведения

Если объект $A$ можно выбрать из некоторого множества объектов $m$ способами, а другой объект $B$ – $n$ способами, то выбор объекта $A$ **или** объекта $B$ (без разницы какого) возможен $m+n$ способами.

Если объект $A$ можно выбрать из некоторого множества объектов $m$ способами **и** после каждого такого выбора объект $B$ можно выбрать $n$ способами, то упорядоченная пара объектов $(A; B)$ может быть выбрана $mn$ способами.

Данные принципы справедливы и для бОльшего количества объектов.

Важная содержательная часть правил состоит в том, знак «плюс» понимается и читается как союз **ИЛИ**, а знак «умножить» – как союз **И**.

## 5) Перестановки, сочетания и размещения с повторениями

Участники действий: множество, состоящее из объектов, среди которых есть одинаковые *(либо считающиеся таковыми по смыслу задачи)*

**Формула количества перестановок с повторениями**: $P_{n(повт)} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot ... \cdot n_k!}$,

где $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k = n$

***Типичная смысловая нагрузка****: «Количество способов, которыми можно переставить $n$ объектов, среди которых 1-й объект повторяется $n_1$ раз, 2-й объект повторяется $n_2$ раз, 3-й объект – $n_3$ раз, …, $k$-й объект – $n_k$ раз»*

Следует отметить, что в подавляющем большинстве задач в совокупности есть и уникальные (не повторяющиеся) объекты, в этом случае соответствующие значения $n_i$ равны единице, и в практических расчётах их можно не записывать в знаменатель.

**Формула количества сочетаний с повторениями**: $C^m_{n(повт)} = C^m_{n+m-1} = \dfrac{(n+m-1)!}{(n-1)! \cdot m!}$

***Типичная смысловая нагрузка****: «Для выбора предложено $n$ множеств, каждое из которых состоит из одинаковых объектов. Сколькими способами можно выбрать $m$ объектов?»*

То есть, здесь в выборке могут оказаться одинаковые объекты, и если $m > n$, то совпадения точно будут. По умолчанию предполагается, что исходная совокупность содержит не менее $m$ объектов ***каждого вида***, и поэтому выборка может полностью состоять из одинаковых объектов.

**Формула количества размещений с повторениями**: $A^m_{n(повт)} = n^m$

***Типичная смысловая нагрузка****: «Дано множество, состоящее из $n$ объектов, при этом любой объект можно выбирать* ***неоднократно****. Сколькими способами можно выбрать $m$ объектов, если* ***важен порядок их расположения*** *в выборке? »*

Для бОльшей ясности здесь удобно представить, что объекты извлекаются последовательно (хотя это вовсе не обязательное условие). В частности, возможен случай, когда из $n$ имеющихся объектов $m$ раз будет выбран какой-то один объект.