Сборник готовых задач с непрерывной случайной величиной

Дополнительный материал к теме «Непрерывная случайная величина»:
http://mathprofi.ru/nepreryvnaya_sluchaynaya_velichina.html

Оглавление:

(кликабельно)

1. Задачи, в которых СВ задана функцией распределения

Задача 1. Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0; & x\le 0\\ \frac{1}{2}(x^3-3x^2+3x); & 0<x\le 2\\ 1; & x>2\end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$, $P(X>1)$

Решение: найдем функцию плотности распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0; & x\le 0\\ \frac{1}{2}(3x^2-6x+3)=\frac{3}{2}(x^2-2x+1); & 0<x\le 2\\ 0; & x>2\end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{3}{2}(x^2-2x+1)dx=\frac{3}{2}\int_0^2(x^3-2x^2+x)dx=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\frac{3}{2}\cdot\left(4-\frac{16}{3}+2\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=1$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^2 x^2\cdot\frac{3}{2}(x^2-2x+1)dx=\frac{3}{2}\int_0^2(x^4-2x^3+x^2)dx=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{32}{5}-8+\frac{8}{3}-0\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{15}=\frac{8}{5}$$

Таким образом:

$$D(X)=\frac{8}{5}-1^2=\frac{8}{5}-1=\frac{3}{5}=0{,}6$$

$P(X>1)=F(+\infty)-F(1)=1-\frac{1}{2}(1-3+3)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение большее единицы.

Ответ: $M(X)=1$, $D(X)=\frac{3}{5}=0{,}6$, $P(X>1)=\frac{1}{2}=0{,}5$

Задача 2. Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-\dfrac{1}{(x+1)^2}, & x\ge 0\end{cases}$$

Найти $M(X)$, $P(X>1)$

Решение: найдем функцию плотности распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{2}{(x+1)^3}, & x\ge 0\end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{2}{(x+1)^3}dx=2\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{(x+1)^3}$$

Сначала найдем неопределенный интеграл:

$$2\int\frac{xdx}{(x+1)^3}=(*)$$

Проведем замену: $t=x+1$, $x=t-1$, $dt=dx$

$$2\int\frac{(t-1)dt}{t^3}=2\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt=2\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)=2\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}\right)$$

Таким образом:

$$M(X)=2\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{(x+1)^3}=2\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}\right)\Bigg|_0^b=$$

$$=2\lim_{b\to+\infty}\left(-\overset{\to 0}{\frac{1}{b+1}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{2(b+1)^2}}+1-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$P(X>1)=F(+\infty)-F(1)=1-\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)=1-1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала.

Ответ: $M(X)=1$, $P(X>1)=\dfrac{1}{4}$

Задача 3. Известна функция распределения случайной величины T – срока службы блока:

$$F(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ kt^2, & 0\le t\le \frac{3}{4}\\ 1, & t>\frac{3}{4}\end{cases}$$

Найти коэффициент k, средний срок службы и дисперсию срока службы блока.

Решение: по свойству функции распределения:

$$F\left(\frac{3}{4}\right)=k\left(\frac{3}{4}\right)^2=1$$

$$k\cdot\frac{9}{16}=1$$

$$k=\frac{16}{9}$$

Таким образом, функция распределения вероятностей:

$$F(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{16}{9}t^2, & 0\le t\le \frac{3}{4}\\ 1, & t>\frac{3}{4}\end{cases}$$

Найдем функцию плотности распределения:

$$f(t)=F'(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{32t}{9}, & 0\le t\le \frac{3}{4}\\ 0, & t>\frac{3}{4}\end{cases}$$

Вычислим средний срок службы блока:

$$M(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt=\frac{32}{9}\int_0^{3/4}t^2dt=\frac{32}{9}\cdot\frac{1}{3}(t^3)\Big|_0^{3/4}=\frac{32}{27}\cdot\left(\frac{27}{64}-0\right)=\frac{1}{2}$$

Дисперсию службы блока вычислим по формуле:

$$D(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}t^2f(t)dt-(M(T))^2$$

В данном случае:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \frac{32}{9}\int_0^{3/4} t^3 dt = \frac{32}{9}\cdot\frac{1}{4}(t^4)\Big|_0^{3/4} = \frac{8}{9}\cdot\left(\frac{81}{256}-0\right) = \frac{9}{32}$$

Таким образом:
$$D(T) = \frac{9}{32} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{32} - \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

Ответ: $k = \frac{16}{9}$, $M(T) = \frac{1}{2}$, $D(T) = \frac{1}{32}$

Задача 4. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x) = c + d(x-2)^4$ на интервале $(2;6)$. Найти: значения постоянных c и d; плотность распределения вероятностей $f(x)$; $P(5 < X < 6)$; математическое ожидание $M(X)$; дисперсию $D(X)$

Решение: найдем значения c и d. По свойству функции распределения:
$$F(2) = c + 0 = c = 0$$
$$F(6) = 0 + d(6-2)^4 = d\cdot 2^8 = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$$
Таким образом:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ \frac{1}{2^8}(x-2)^4, & 2 < x < 6; \\ 1, & x \ge 6 \end{cases}$$

Найдем плотность распределения вероятностей $f(x)$:
$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ \frac{1}{2^6}(x-2)^3, & 2 < x < 6; \\ 0, & x \ge 6 \end{cases}$$

Вычислим $P(5 < X < 6) = F(6) - F(5) = 1 - \frac{3^4}{2^8} = 1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256} \approx 0{,}68$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала.

Вычислим математическое ожидание:
$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{2^6}\int_2^6 x(x-2)^3 dx = (*)$$

Интегрируем по частям:
$$u = x \Rightarrow du = dx$$
$$dv = (x-2)^3 dx \Rightarrow v = \frac{1}{4}(x-2)^4$$
$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$(*)=\frac{1}{2^6}\left[\frac{x}{4}(x-2)^4\Big|_2^6-\frac{1}{4}\int_2^6(x-2)^4dx\right]=\frac{1}{2^8}\left[6\cdot 2^8-0-\frac{1}{5}(x-2)^5\Big|_2^6\right]=$$

$$=\frac{1}{2^8}\left(6\cdot 2^8-\frac{2^{10}}{5}+0\right)=6-\frac{4}{5}=\frac{26}{5}=5\frac{1}{5}=5{,}2$$

Вычислим дисперсию. Используем формулу:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\frac{1}{2^6}\int_2^6x^2(x-2)^3dx=(*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$$u=x^2\Rightarrow du=2xdx$$

$$dv=(x-2)^3dx\Rightarrow v=\frac{1}{4}(x-2)^4$$

$$\int udv=uv-\int vdu$$

$$(*)=\frac{1}{2^6}\left[\frac{x^2}{4}(x-2)^4\Big|_2^6-\frac{2}{4}\int_2^6x(x-2)^4dx\right]=\frac{1}{2^8}\left[36\cdot 2^8-0-2\int_2^6x(x-2)^4dx\right]=(*)$$

$$u=x\Rightarrow du=dx$$

$$dv=(x-2)^4dx\Rightarrow v=\frac{1}{5}(x-2)^5$$

$$(*)=\frac{1}{2^8}\left[36\cdot 2^8-2\left(\frac{x}{5}(x-2)^5\Big|_2^6-\frac{1}{5}\int_2^6(x-2)^5dx\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2^8}\left[36\cdot 2^8-\frac{12}{5}\cdot 2^{10}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6}(x-2)^6\Big|_2^6\right]=$$

$$=\frac{1}{2^8}\left[36\cdot 2^8-\frac{12}{5}\cdot 2^{10}+\frac{1}{15}\cdot 2^{12}\right]=36-\frac{48}{5}+\frac{16}{15}=\frac{412}{15}$$

Таким образом:

$$D(X)=\frac{412}{15}-\left(\frac{26}{5}\right)^2=\frac{412}{15}-\frac{676}{25}=\frac{32}{75}\approx 0{,}43$$

Задача 5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)=c+\frac{d}{(x+2)^3}$ на интервале $(2;+\infty)$. Найти: значения постоянных c и d; плотность распределения вероятностей $f(x)$; $P(2<X<3)$; математическое ожидание $M(X)$; дисперсию $D(X)$

Решение: найдем значения постоянных c и d. Используем свойство непрерывности функции распределения:

$$F(+\infty)=c+\frac{d}{+\infty}=c+0=1\Rightarrow c=1;$$

$$F(2)=1+\frac{d}{4^3}=0\Rightarrow d=-2^6=-64.$$

Таким образом:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ 1-\frac{2^6}{(x+2)^3}, & x>2\end{cases}$$

Найдем плотность распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \frac{3\cdot 2^6}{(x+2)^4}, & x>2\end{cases}$$

$P(2<X<3)=F(3)-F(2)=1-\frac{2^6}{5^3}-0=1-\frac{64}{125}=\frac{61}{125}=0{,}488$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала.

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=3\cdot 2^6\int_{2}^{+\infty}\frac{x}{(x+2)^4}dx=(*)$$

Проведем замену: $t=x+2\Rightarrow x=t-2\Rightarrow dx=dt$

Новые пределы интегрирования:

$t_1=2+2=4;$

$t_2=+\infty+2=+\infty$

$$(*)=3\cdot 2^6\int_{4}^{+\infty}\frac{t-2}{t^4}dt=3\cdot 2^6\int_{4}^{+\infty}\left(\frac{1}{t^3}-\frac{2}{t^4}\right)dt=3\cdot 2^6\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2t^2}+\frac{2}{3t^3}\right)\Big|_4^b=$$

$$=3\cdot 2^6\lim_{b\to+\infty}\left(\left(-\overset{\to 0}{\frac{1}{2b^2}}+\overset{\to 0}{\frac{2}{3b^3}}\right)-\left(-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3\cdot 2^5}\right)\right)=3\cdot 2^6\left(\frac{1}{2^5}-\frac{1}{3\cdot 2^5}\right)=6-2=4$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = 3\cdot 2^6 \int_2^{+\infty} \frac{x^2}{(x+2)^4}dx = 3\cdot 2^6 \int_4^{+\infty} \frac{(t-2)^2}{t^4}dt = 3\cdot 2^6 \int_4^{+\infty} \frac{t^2-4t+4}{t^4}dt =$$

$$= 3\cdot 2^6 \int_4^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{4}{t^3} + \frac{4}{t^4}\right)dt = 3\cdot 2^6 \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} - \frac{4}{3t^3}\right)\Bigg|_4^b =$$

$$= 3\cdot 2^6 \lim_{b\to+\infty}\left(\left(-\overset{\to 0}{\frac{1}{b}} + \overset{\to 0}{\frac{2}{b^2}} - \overset{\to 0}{\frac{4}{3b^3}}\right) - \left(-\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3\cdot 2^4}\right)\right) = 3\cdot 2^6\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3\cdot 2^4}\right) =$$

$$= 48 - 24 + 4 = 28$$

Таким образом:

$$D(X) = 28 - 4^2 = 28 - 16 = 12$$

Задача 6. Дана функция распределения вероятностей

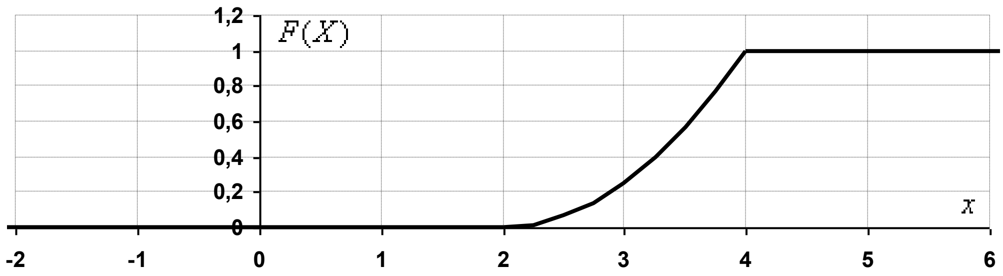
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \frac{1}{4}(x-2)^2, & 2 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

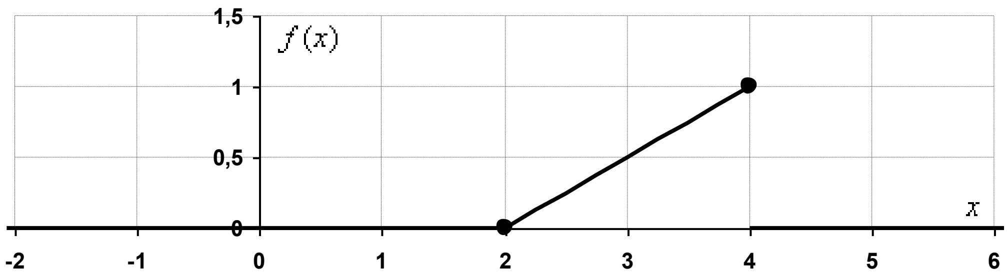
Найти $f(x)$, $P(3 < X < 4)$, $P(X > 1)$, $P(X < 5)$, $P(2{,}1 < X < 5)$. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \frac{1}{2}(x-2), & 2 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Построим графики $F(x)$ и $f(x)$:





Вычислим вероятности попадания случайной величины X в интервалы:

$$P(3 < X < 4) = F(4) - F(3) = \frac{1}{4}(4-2)^2 - \frac{1}{4}(3-2)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(X > 1) = F(+\infty) - F(1) = 1 - 0 = 1$$

$$P(X < 5) = F(5) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

$$P(2{,}1 < X < 5) = F(5) - F(2{,}1) = 1 - \frac{1}{4}(2{,}1-2)^2 = 1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$$

Задача 7. Задана функция распределения случайной величины X:

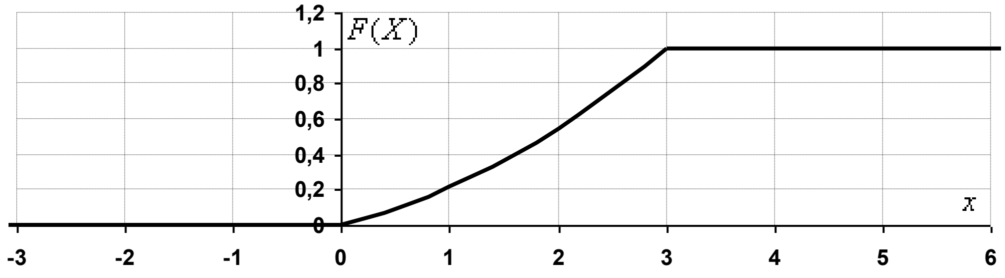
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{33}(2x^2 + 5x), & 0 \le x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

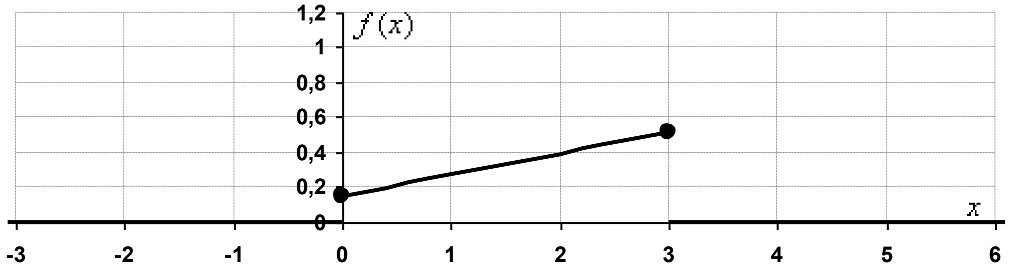
Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[1;2]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{33}(4x + 5), & 0 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$:





Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{33}\int_0^3 x(4x+5)dx=\frac{1}{33}\int_0^3(4x^2+5x)dx=$$

$$=\frac{1}{33}\cdot\left(\frac{4x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=\frac{1}{33}\cdot\left(36+\frac{45}{2}-0\right)=\frac{1}{33}\cdot\frac{117}{2}=\frac{39}{22}\approx 1{,}77$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(X))^2=\frac{1}{33}\int_0^3 x^2(4x+5)dx-\left(\frac{39}{22}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{33}\int_0^3(4x^3+5x^2)dx-\frac{1521}{484}=\frac{1}{33}\cdot\left(x^4+\frac{5x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3-\frac{1521}{484}=\frac{1}{33}\cdot(81+45-0)-\frac{1521}{484}=$$

$$=\frac{42}{11}-\frac{1521}{484}=\frac{327}{484}\approx 0{,}676$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $[1;2]$.

$P(1\le X\le 2)=F(2)-F(1)=\frac{18}{33}-\frac{7}{33}=\frac{11}{33}=\frac{1}{3}\approx 0{,}333$ – искомая вероятность.

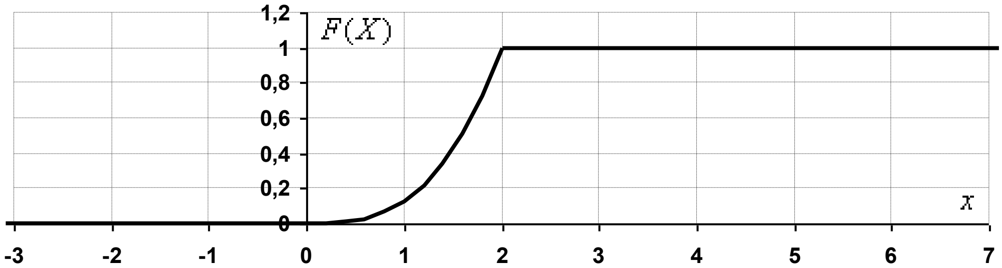
Задача 8. Случайная непрерывная величина X задана своей функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{8}x^3, & 0\le x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$. Требуется: а) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$; б) схематично построить график функций $F(x)$ и $f(x)$; в) Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$; г) Определить вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha;\beta)=(1;3)$.

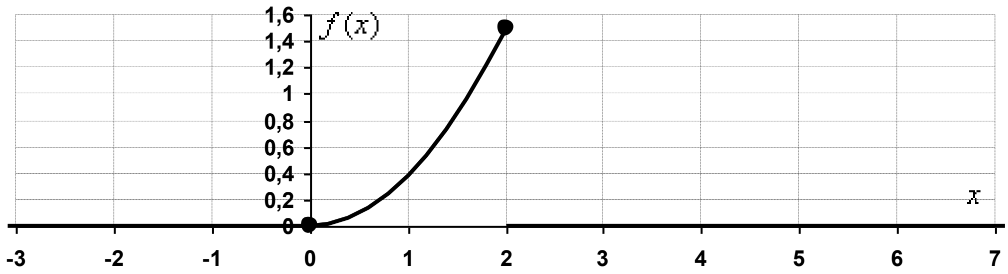
Решение:

а) Найдем плотность распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{3x^2}{8}, & 0\le x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

б) Построим графики $F(x)$ и $f(x)$:





в) Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{3}{8}\int_0^2 x^3dx=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}\left(x^4\right)\Big|_0^2=\frac{3}{32}\cdot(16-0)=\frac{3}{2}=1{,}5$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2=\frac{3}{8}\int_0^2 x^4dx-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5}\left(x^5\right)\Big|_0^2-\frac{9}{4}=$$

$$=\frac{3(32-0)}{40}-\frac{9}{4}=\frac{12}{5}-\frac{9}{4}=\frac{3}{20}=0{,}15$$

г) Найдем вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha;\beta)=(1;3)$:

$P(1<X<3)=F(3)-F(1)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=0{,}875$ – искомая вероятность.

Задача 9. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{1}{15}(x^4-1), & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

Найти функцию плотности распределения $f(x)$ и построить графики данных функций. Вычислить математическое ожидание и медиану x_0.

Решение: найдём функцию плотности распределения:

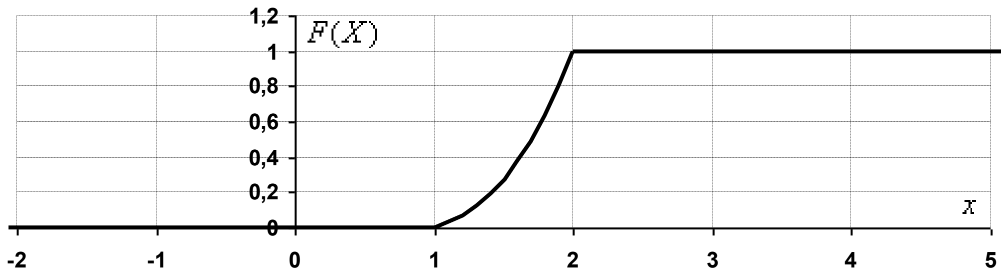
$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{4x^3}{15}, & 1<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

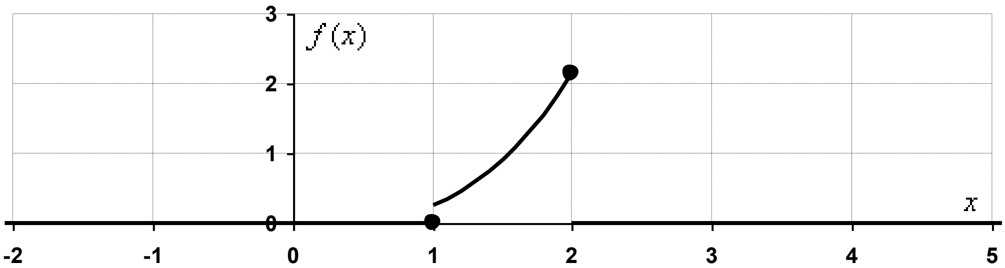
Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_1^2\left(x\cdot\frac{4x^3dx}{15}\right)=\frac{4}{15}\int_1^2 x^4dx=$$

$$=\frac{4}{15}\cdot\frac{1}{5}(x^5)\Big|_1^2=\frac{4}{75}\cdot(32-1)=\frac{4}{75}\cdot 31=\frac{124}{75}\approx 1{,}65$$

Построим графики:





Медиана непрерывной случайной величины определяется условием $F(x_0)=\frac{1}{2}$, в данном случае:

$$\frac{1}{15}(x_0^4-1)=\frac{1}{2}$$

$$x_0^4-1=\frac{15}{2}$$

$$x_0^4=\frac{15}{2}+1=\frac{17}{2}$$

$$x_0=\sqrt[4]{\frac{17}{2}}\approx 1{,}71$$

Задача 10. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

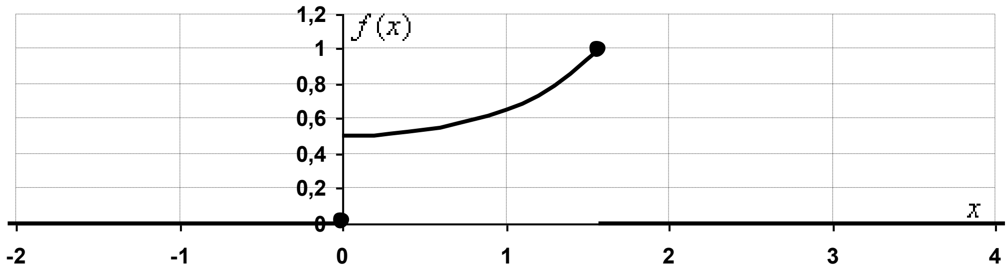
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ tg\frac{x}{2}, & 0<x\le\frac{\pi}{2}\\ 1, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

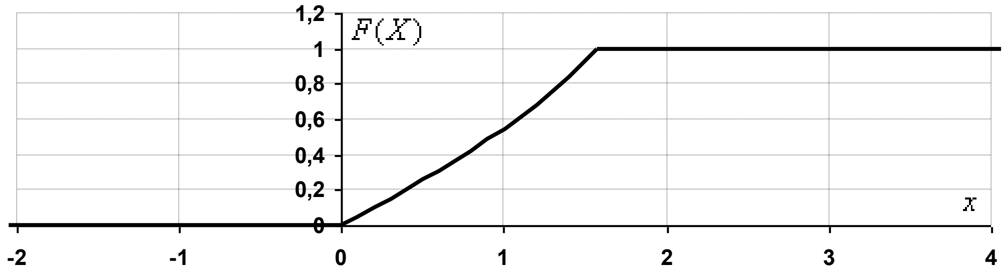
Найти функцию плотности распределения $f(x)$ и построить графики данных функций. Вычислить математическое ожидание и найти $p\left(-\frac{\pi}{3}<X<\frac{\pi}{3}\right)$.

Решение: найдём функцию плотности распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}, & 0<x\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Выполним чертежи:





Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2}\frac{xdx}{\cos^2\frac{x}{2}}=(*)$$

Интегрируем по частям:
$u=x\Rightarrow du=dx$

$$dv=\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}\Rightarrow v=\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}}=tg\frac{x}{2}$$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$(*)=\left(xtg\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}tg\frac{x}{2}dx=\frac{\pi}{2}-0-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\frac{x}{2}dx}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\pi}{2}+2\int_0^{\pi/2}\frac{d\left(\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}+2\left(\ln\cos\frac{\pi}{4}-\ln\cos 0\right)=\frac{\pi}{2}+2\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}}-\ln 1\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}+2\left(\ln 2^{-\frac{1}{2}}-0\right)=\left(\frac{\pi}{2}-\ln 2\right)\approx 0{,}88$$

Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала:

$$p\left(-\frac{\pi}{3}<X<\frac{\pi}{3}\right)=F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F\left(-\frac{\pi}{3}\right)=tg\frac{\pi}{6}-0=\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}58$$

Задача 11. Задана непрерывная случайная величина X функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ \sqrt{2}\sin x,\ 0<x\le\dfrac{\pi}{4}\\ 1,\ x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

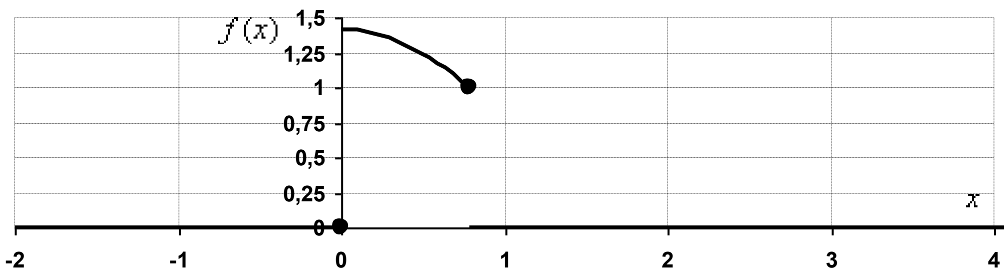
Требуется: 1) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$; 2) схематично построить графики $f(x)$ и $F(x)$; 3) найти математическое ожидание и дисперсию X.

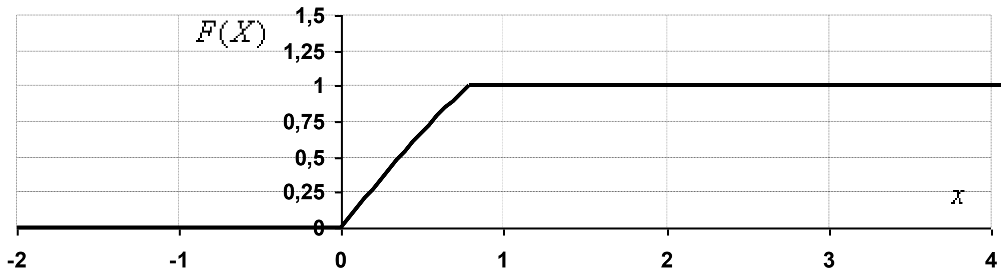
Решение:

1) Найдем функцию плотности распределения $f(x)$:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ \sqrt{2}\cos x,\ 0<x\le\dfrac{\pi}{4}\\ 0,\ x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

2) Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$:





3) Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos xdx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$$u=\sqrt{2}x\Rightarrow du=\sqrt{2}dx$$

$$dv=\cos x\Rightarrow v=\sin x$$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$(*)=\sqrt{2}(x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin xdx=\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}-0\right)+\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos 0\right)=\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)=\frac{\pi}{4}+1-\sqrt{2}\approx 0{,}37$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\cos xdx=(*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$$u=\sqrt{2}x^2\Rightarrow du=2\sqrt{2}xdx$$

$$dv=\cos x\Rightarrow v=\sin x$$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$(*)=\sqrt{2}x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\pi^2}{16\sqrt{2}}-0\right)-2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sin x=(*)$$

$$u=-2\sqrt{2}x\Rightarrow du=-2\sqrt{2}dx$$

$$dv=\sin xdx\Rightarrow v=-\cos x$$

$$(*)=\frac{\pi^2}{16}+2\sqrt{2}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos xdx=\frac{\pi^2}{16}+2\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}-0\right)-2\sqrt{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2$$

Таким образом:

$$D(X)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2-\left(\frac{\pi}{4}+1-\sqrt{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2-\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{2}(1-\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})^2=$$

$$=\frac{\pi}{2}-2-\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{2}-1+2\sqrt{2}-2=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}+2\sqrt{2}-5\approx 0{,}05$$

Задача 12. Задана функция распределения случайной величины X:

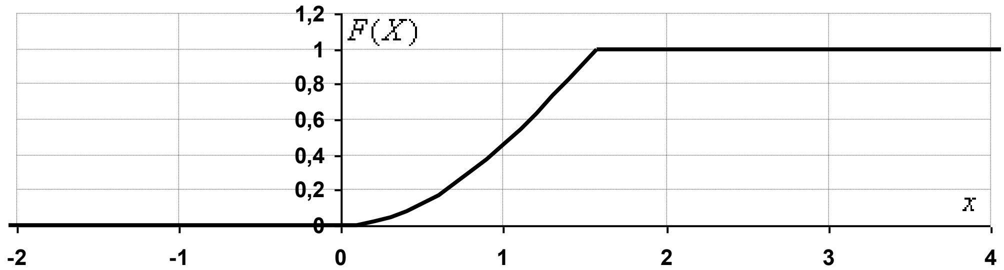
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-\cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}.$$

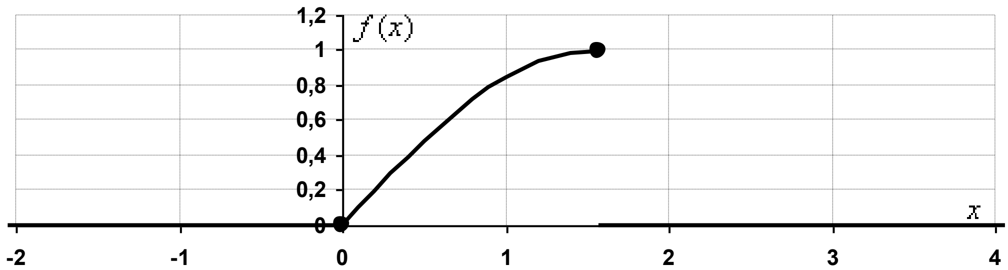
Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$:





Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$u=x\Rightarrow du=dx$

$dv=\sin x\Rightarrow v=-\cos x$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$(*) = -(x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = (0-0) + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = (*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$$

$$dv = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

$$(*) = -(x^2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x = -(0-0) + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x = (*)$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx$$

$$dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$(*) = 2(x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + 2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \pi + 2(0-1) = \pi - 2$$

Таким образом:

$$D(X) = \pi - 2 - 1^2 = \pi - 3 \approx 0{,}14$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$:

$$P\left(0 \le X \le \frac{\pi}{3}\right) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0) = 1 - \cos\frac{\pi}{3} - (1-1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

– искомая вероятность.

Задача 13. Задана функция распределения случайной величины X:

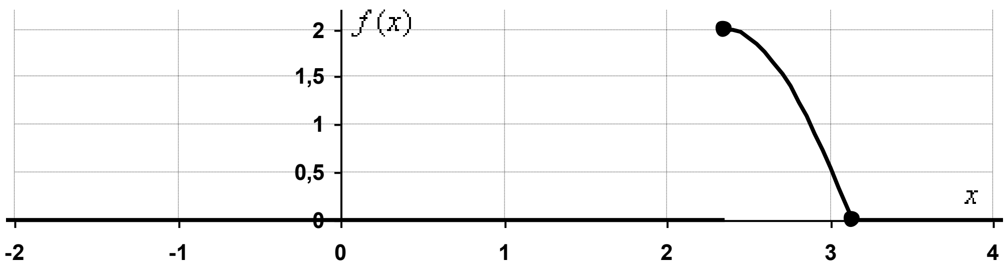
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<\dfrac{3\pi}{4}\\ \cos 2x, & \dfrac{3\pi}{4}\le x\le \pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}.$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $\left[\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{5\pi}{6}\right]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<\dfrac{3\pi}{4}\\ -2\sin 2x, & \dfrac{3\pi}{4}\le x\le \pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$$

Построим графики функций $F(x)$ и $F(x)$:



Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=-2\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} x\sin 2x dx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$u=x\Rightarrow du=dx$

$dv=-2\sin 2x\Rightarrow v=\cos 2x$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$(*)=(x\cos 2x)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}-\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\cos 2x dx=(\pi-0)-\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}=\pi-\frac{1}{2}(0+1)=\pi-\frac{1}{2}\approx 2{,}64$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-(M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=-2\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}x^2\sin 2x dx=(*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$u=x^2\Rightarrow du=2xdx$

$dv=-2\sin 2x\Rightarrow v=\cos 2x$

$$(*)=(x^2\cos 2x)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}-2\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}x\cos 2x=\left(\pi^2-0\right)-2\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}x\cos 2x=(*)$$

$u=-x\Rightarrow du=-dx$

$dv=2\cos 2xdx\Rightarrow v=\sin 2x$

$$(*)=\pi^2-(x\sin 2x)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin 2x dx=\pi^2-\left(0+\frac{3\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}=$$

$$=\pi^2-\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}(1-0)=\pi^2-\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$D(X)=\pi^2-\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}-\left(\pi-\frac{1}{2}\right)^2=\pi^2-\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}-\pi^2+\pi-\frac{1}{4}=\frac{\pi-3}{4}\approx 0{,}035$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{6}\right]$:

$$P\left(\frac{3\pi}{4}\le X\le\frac{5\pi}{6}\right)=F\left(\frac{5\pi}{6}\right)-F\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(2\cdot\frac{5\pi}{6}\right)-\cos\left(2\cdot\frac{3\pi}{4}\right)=$$

$=\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}-0=0{,}5$ – искомая вероятность.

2. Задачи, в которых СВ задана функцией плотности

Задача 14. Дана функция плотности распределения случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases} Cx^2, & x\in[0;2] \\ 0, & x\notin[0;2] \end{cases}$$

Найти C, $M(X)$, $P\left(0\le X<\frac{1}{2}\right)$

Решение: функция плотности распределения вероятности обладает свойством $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. В данном случае:

$$C\int_0^2 x^2dx=1\Rightarrow C=\frac{1}{\int_0^2 x^2dx}$$

$$\int_0^2 x^2dx=\frac{1}{3}(x^3)\Big|_0^2=\frac{1}{3}(8-0)=\frac{8}{3}$$

Таким образом:

$$C=\frac{1}{\frac{8}{3}}=\frac{3}{8}$$

Функция плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & x\in[0;2] \\ 0, & x\notin[0;2] \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{8}\int_0^2 x^3dx=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}(x^4)\Big|_0^2=$$

$$=\frac{3}{32}(16-0)=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$$

Найдём:

$P\left(0\le X<\frac{1}{2}\right)=\int_0^{1/2} f(x)dx=\frac{3}{8}\int_0^{1/2} x^2dx=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}\left(x^3\right)\Big|_0^{1/2}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}-0\right)=\frac{1}{64}$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала.

Ответ: $C=\frac{3}{8}$, $M(X)=1\frac{1}{2}=1{,}5$, $P\left(0\le X<\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{64}=0{,}015625$

Задача 15. Дана функция плотности распределения случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}(1-x^2), & x\in[-1;1]\\ 0, & x\notin[-1;1]\end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$, $P\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)$

Решение: вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{3}{4}(1-x^2)dx=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(x-x^3)dx=\frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}\cdot 0=0$$

Вычислим дисперсию:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(x))^2=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{3}{4}(1-x^2)dx-0^2=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(x^2-x^4)dx=\frac{3}{4}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{15}=\frac{1}{5}$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)=\int_{-1/2}^{1/2}f(x)dx=\frac{3}{4}\int_{-1/2}^{1/2}(1-x^2)dx=\frac{3}{4}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1/2}^{1/2}=$$

$=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\right)\right)=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{12}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{12}=\frac{11}{16}$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала.

Ответ: $M(X)=0$, $D(X)=\frac{1}{5}=0{,}2$, $P\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{16}=0{,}6875$

Задача 16. Дана функция плотности распределения случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases}\frac{C}{x^4}, & x\ge 2\\ 0, & x<2\end{cases}$$

Найти C, $M(X)$, $P(2\le X<3)$

Решение: функция плотности распределения вероятности обладает свойством $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$. В данном случае:

$$C\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^4}=1\Rightarrow C=\frac{1}{\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^4}}$$

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^4}=-\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)\Big|_{2}^{b}=-\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\overset{\to 0}{\frac{1}{b^3}}-\frac{1}{2^3}\right)=-\frac{1}{3}\cdot\left(0-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{24}$$

Таким образом: $C=\dfrac{1}{\frac{1}{24}}=24$

Функция плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{24}{x^4}, & x\ge 2\\ 0, & x<2\end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{2}^{+\infty}x\cdot\frac{24}{x^4}dx=24\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\Big|_2^b=$$

$$=-12\lim_{b\to+\infty}\left(\overset{\to 0}{\frac{1}{b^2}}-\frac{1}{2^2}\right)=-12\cdot\left(0-\frac{1}{4}\right)=3$$

$$P(2\le X<3)=24\int_2^3\frac{dx}{x^4}=24\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^3}\right)\Big|_2^3=-8\cdot\left(\frac{1}{27}-\frac{1}{8}\right)=-8\cdot\left(-\frac{19}{216}\right)=\frac{19}{27}$$ –

вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала.

Ответ: $C=24$, $M(X)=3$, $P(2\le X<3)=\dfrac{19}{27}\approx 0{,}7037$

Задача 17. Задана плотность распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ A\sqrt{x}, & 1\le x\le 4;\\ 0, & x>4\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и $P(2<X<3)$

Решение: сначала найдем коэффициент A. По свойству $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ функции плотности распределения:

$$A\int_1^4\sqrt{x}dx=1\Rightarrow A=\frac{1}{\int_1^4\sqrt{x}dx}$$

$$\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_1^4=\frac{2}{3}(\sqrt{64}-\sqrt{1})=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}\Rightarrow A=\frac{3}{14}$$

Таким образом, функция плотности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ \dfrac{3}{14}\sqrt{x}, & 1\le x\le 4;\\ 0, & x>4\end{cases}$$

Найдем функцию распределения $F(x)$:

Если $x<1$, то $f(x)=0$ и $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0$.

Если $1\le x\le 4$, то $f(x)=\frac{3}{14}\sqrt{x}$ и

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{1}0dx+\frac{3}{14}\int\limits_{1}^{x}\sqrt{x}dx=0+\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_1^x=\frac{1}{7}(\sqrt{x^3}-1).$$

Если $x>4$, то $f(x)=0$ и:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{1}0dx+\frac{3}{14}\int\limits_{1}^{4}\sqrt{x}dx+\int\limits_{4}^{x}0dx=0+\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{3}\left(\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^4+0=\frac{1}{7}(8-1)=\frac{1}{7}\cdot 7=1.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{1}{7}(\sqrt{x^3}-1), & 1\le x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$$

Вычислим:

$$P(2<X<3)=F(3)-F(2)=\frac{1}{7}(3\sqrt{3}-1)-\frac{1}{7}(2\sqrt{2}-1)=\frac{1}{7}\left(3\sqrt{3}-1-2\sqrt{2}+1\right)=$$

$=\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{7}\approx 0{,}34$ – вероятность того, что X примет значение из интервала $(2;3)$:

Задача 18. Случайная величина X задана плотность распределения $f(x)=c\left(\frac{3}{2}x^2+2x\right)$ на интервале $(0;1)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти: а) параметр c; б) функцию распределения случайной величины X; с) математическое ожидание и дисперсию величины X.

Решение:

а) Найдем коэффициент c. Функция плотности распределения вероятности обладает свойством $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$. В данном случае:

$$c\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2+2x\right)dx=1$$

$$c\left(\frac{1}{2}x^3+x^2\right)\Big|_0^1=1$$

$$c\left(\frac{1}{2}+1-0\right)=1$$

$$\frac{3c}{2}=1\Rightarrow c=\frac{2}{3}$$

Таким образом, функция плотности распределения:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\frac{4}{3}x, & x\in(0;1) \\ 0, & x\notin(0;1) \end{cases}$$

б) Найдем функцию распределения $F(x)$.

Если $x\le 0$ то $f(x)=0,\ F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0$.

Если $0<x<1$, то $f(x)=x^2+\frac{4}{3}x$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{x}\left(x^2+\frac{4}{3}x\right)dx=0+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{3}\right)\Bigg|_0^x=\frac{1}{3}(x^3+2x^2-0)=\frac{1}{3}(x^3+2x^2)$$

Если $x\ge 1$ то $f(x)=0$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{1}\left(x^2+\frac{4}{3}x\right)dx+\int\limits_{1}^{x}0dx=0+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{3}\right)\Bigg|_0^1+0=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-0=1$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{1}{3}(x^3+2x^2), & 0<x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$

с) Найдем математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int\limits_{0}^{1}x\left(x^2+\frac{4}{3}x\right)dx=\int\limits_{0}^{1}\left(x^3+\frac{4}{3}x^2\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{9}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{4}{9}=\frac{25}{36}\approx 0{,}7$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int\limits_{0}^{1}x^2\left(x^2+\frac{4}{3}x\right)dx=\int\limits_{0}^{1}\left(x^4+\frac{4}{3}x^3\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-0=\frac{8}{15}$$

Таким образом:

$$D(X)=\frac{8}{15}-\left(\frac{25}{36}\right)^2=\frac{8}{15}-\frac{625}{1296}\approx 0{,}05$$

Задача 19. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^4+2x}{c}, & 0<x\le 1.\\ 0, & x>1\end{cases}$

Найти c, $M(X)$, $D(X)$, $P(0{,}5<X<2{,}5)$

Решение: найдем коэффициент c.
По свойству функции плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

В данной задаче:

$$\int_0^1 \frac{x^4+2x}{c}dx=1$$

$$\frac{1}{c}\int_0^1 (x^4+2x)dx=1$$

$$c=\int_0^1 (x^4+2x)dx=\left(\frac{x^5}{5}+x^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{5}+1-0-0=\frac{6}{5}$$

Таким образом, функция плотности распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ \dfrac{5}{6}(x^4+2x),\ 0<x\le 1\\ 0,\ x>1\end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot\frac{5}{6}(x^4+2x)dx=\frac{5}{6}\int_0^1 (x^5+2x^2)dx=\frac{5}{6}\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-0-0\right)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot\frac{5}{6}(x^4+2x)dx=\frac{5}{6}\int_0^1 (x^6+2x^3)dx=\frac{5}{6}\left(\frac{x^7}{7}+\frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{2}-0-0\right)=\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{14}=\frac{15}{28}$$

Таким образом, дисперсия:

$$D(X)=\frac{15}{28}-\left(\frac{25}{36}\right)^2=\frac{15}{28}-\frac{625}{1296}=\frac{485}{9072}=\approx 0{,}05$$

Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(0{,}5;\,2{,}5)$:

$$P(0{,}5<X<2{,}5)=\int_{0{,}5}^{2{,}5} f(x)dx=\frac{5}{6}\int_{0{,}5}^{1}(x^4+2x)dx+\int_{1}^{2{,}5}0dx=$$

$$=\frac{5}{6}\left(\frac{x^5}{5}+x^2\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}+0=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{5}+1-\frac{1}{160}-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{6}\left(\frac{6}{5}-\frac{41}{160}\right)=1-\frac{41}{192}=\frac{151}{192}$$

Ответ: $c=\frac{6}{5}$; $M(X)=\frac{25}{36}\approx 0{,}7$; $D(X)=\frac{485}{9072}\approx 0{,}05$; $P(0{,}5<X<2{,}5)=\frac{151}{192}\approx 0{,}79$

Задача 20. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} A(x-1), & x\in[2;4] \\ 0, & x\notin[2;4] \end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент A;

2) найти функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) вычислить вероятности попадания случайной величины X на промежутки $[-5;3]$ и $(3;7)$;

5) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение:

1) Найдем коэффициент A.

Функция плотности распределения вероятности обладает свойством $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

В данном случае:

$$A\int_2^4 (x-1)dx=1$$

$$\frac{A}{2}(x-1)^2\Big|_2^4=1$$

$$A(9-1)=2$$

$$A=\frac{1}{4}$$

Таким образом, функция плотности распределения:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}(x-1), & x\in[2;4] \\ 0, & x\notin[2;4] \end{cases}$$

2) Найдем функцию распределения $F(x)$.

Если $x<2$ то $f(x)=0$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0$.

Если $2\le x\le 4$, то $f(x)=\frac{1}{4}(x-1)$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{2}0dx+\frac{1}{4}\int\limits_{2}^{x}(x-1)dx=0+\frac{1}{8}(x-1)^2\Big|_2^x=\frac{(x-1)^2-1}{8}=\frac{x^2-2x+1-1}{8}=\frac{x^2-2x}{8}$$

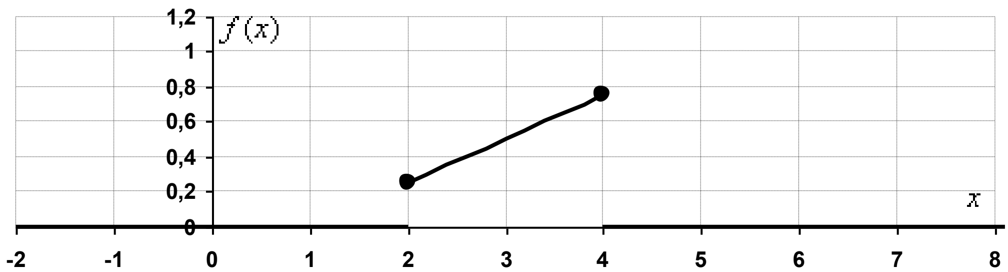
Если $x>4$ то $f(x)=0$

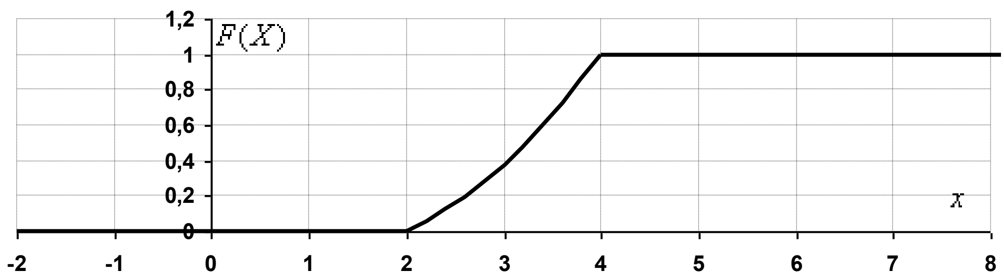
$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{2}0dx+\frac{1}{4}\int\limits_{2}^{4}(x-1)dx+\int\limits_{4}^{x}0dx=0+\frac{1}{8}(x-1)^2\Big|_2^4+0=\frac{1}{8}(9-1)=1.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ \dfrac{x^2-2x}{8}, & 2\le x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$$

3) Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





4) Вычислим вероятности попадания значений случайной величины X на промежутки $[-5;3]$ и $(3;7)$:

$$P(-5\le X\le 3)=F(3)-F(-5)=\frac{9-6}{8}-0=0{,}375$$

$$P(3<X<7)=F(7)-F(3)=1-0{,}375=0{,}625$$

5) Найдем математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{4}\int_{2}^{4} x(x-1)dx=\frac{1}{4}\int_{2}^{4}(x^2-x)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{64}{3}-8-\frac{8}{3}+2\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{38}{3}=\frac{19}{6}=3\frac{1}{6}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{2}^{4} x^2(x-1)dx=\frac{1}{4}\int_{2}^{4}(x^3-x^2)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^4=$$

$$=\frac{1}{4}\left(64-\frac{64}{3}-4+\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{124}{3}=\frac{31}{3}$$

Таким образом:

$$D(X)=\frac{31}{3}-\left(\frac{19}{6}\right)^2=\frac{31}{3}-\frac{361}{36}=\frac{11}{36}$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{11}{36}}=\frac{\sqrt{11}}{6}\approx 0{,}55$$

Задача 21. Задана случайная непрерывная величина X своей плотностью распределения вероятностей $f(x)=\begin{cases}0, & x<-3\\ c(x+4), & -3\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$. Требуется:

1) определить коэффициент C;
2) найти функцию распределения $F(x)$;
3) схематично построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;
4) вычислить математическое ожидание и дисперсию X;
5) определить вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha,\beta)=(-2{,}0)$.

Решение:

1) Найдем коэффициент C. По свойству функции плотности распределения:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ Для данной задачи:

$$c\int_{-3}^{1}(x+4)dx=1\Rightarrow c=\frac{1}{\int_{-3}^{1}(x+4)dx}$$

$$\int_{-3}^{1}(x+4)dx=\frac{(x+4)^2}{2}\Big|_{-3}^{1}=\frac{1}{2}\left(25-1\right)=12\Rightarrow c=\frac{1}{12}$$

Таким образом, функция плотности распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-3\\ \frac{1}{12}(x+4), & -3\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

2) Найдем функцию распределения $F(x)$.

Если $x<-3$, то $f(x)=0$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dx=0$.

Если $-3\le x\le 1$ то $f(x)=\frac{1}{12}(x+4)$,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-3}0dx+\frac{1}{12}\int_{-3}^{x}(x+4)dx=0+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}(x+4)^2\Big|_{-3}^{x}=\frac{1}{24}\left((x+4)^2-1\right)=\frac{(x+4)^2-1}{24}.$$

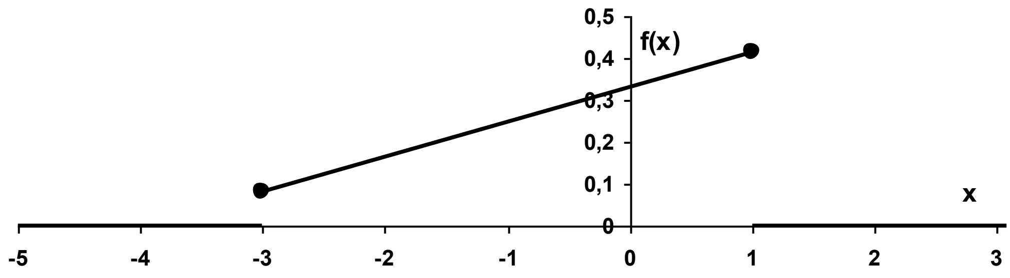
Если $x>1$, то $f(x)=0$,

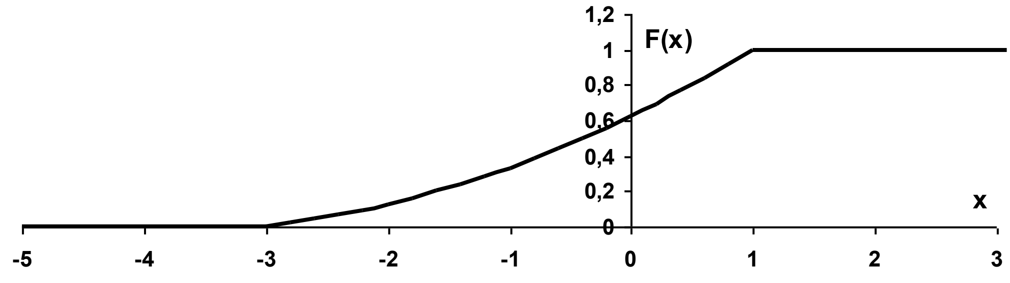
$$F(x)=\int_{-\infty}^{-3}0dx+\frac{1}{12}\int_{-3}^{1}(x+4)dx+\int_{1}^{x}0dx=0+\frac{1}{24}(x+4)^2\Big|_{-3}^{1}+0=\frac{1}{24}(25-1)=1.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-3\\ \frac{(x+4)^2-1}{24}, & -3\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

3) Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$:





4) Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{12}\int_{-3}^{1} x(x+4)dx=\frac{1}{12}\int_{-3}^{1}(x^2+4x)dx=\frac{1}{12}\left(\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Bigg|_{-3}^{1}=$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}+2-(-9+18)\right)=\frac{1}{12}\cdot\left(-\frac{20}{3}\right)=-\frac{5}{9}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\frac{1}{12}\int_{-3}^{1} x^2(x+4)dx=\frac{1}{12}\int_{-3}^{1}(x^3+4x^2)dx=\frac{1}{12}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_{-3}^{1}=$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}+\frac{4}{3}-\left(\frac{81}{4}-36\right)\right)=\frac{1}{12}\cdot\frac{52}{3}=\frac{13}{9}$$

Таким образом:

$$D(X)=\frac{13}{9}-\left(-\frac{5}{9}\right)^2=\frac{13}{9}-\frac{25}{81}=\frac{92}{81}=1\frac{11}{81}\approx 1{,}136$$

5) Найдем вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha,\beta)=(-2,0)$.

$P(-2<X<0)=F(0)-F(-2)=\frac{15}{24}-\frac{3}{24}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$ – искомая вероятность.

Задача 22. Непрерывная случайная величина (НСВ) X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0; & x\le -3\\ a; & -3<x\le -1\\ 3a; & -1<x\le 2\\ 0; & x>2\end{cases}$$

Найти значение a и построить график плотности распределения. Найти функцию распределения вероятностей $F(x)$ и построить ее график. Найти числовые характеристики НСВ X – математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Найти вероятность $P(-2\le X\le 0)$.

Решение: найдем значение параметра a. Функция плотности распределения вероятности обладает свойством $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. В данном случае:

$$a\int_{-3}^{-1} dx+3a\int_{-1}^{2} dx=1$$

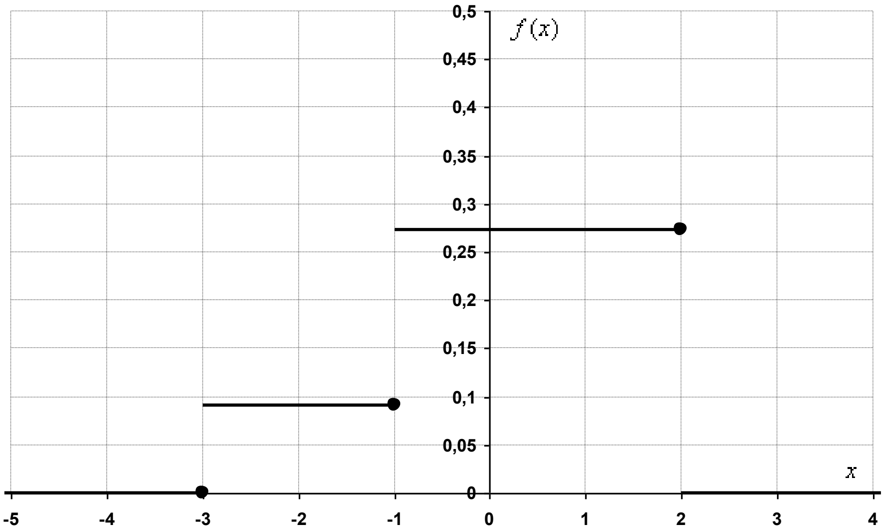
$$a\cdot(x)\Big|_{-3}^{-1}+3a\cdot(x)\Big|_{-1}^{2}=1$$

$$a\cdot(-1-(-3))+3a\cdot(2-(-1))=1$$
$$2a+9a=1$$
$$11a=1\Rightarrow a=\frac{1}{11}$$

Таким образом, функция плотности распределения вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0; & x\le -3\\ \dfrac{1}{11}; & -3<x\le -1\\ \dfrac{3}{11}; & -1<x\le 2\\ 0; & x>2\end{cases}$$

Выполним чертеж:



Составим функцию распределения вероятностей:

Если $x\le -3$, то $f(x)=0$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0$

Если $-3<x\le -1$, то $f(x)=\frac{1}{11}$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-3}0dx+\frac{1}{11}\int\limits_{-3}^{x}dx=0+\frac{1}{11}(x)\Big|_{-3}^{x}=\frac{x+3}{11}$

Если $-1<x\le 2$, то $f(x)=\frac{3}{11}$,

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-3}0dx+\frac{1}{11}\int\limits_{-3}^{-1}dx+\frac{3}{11}\int\limits_{-1}^{x}dx=0+\frac{1}{11}(x)\Big|_{-3}^{-1}+\frac{3}{11}(x)\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{11}(-1+3)+\frac{3}{11}(x+1)=$$
$$=\frac{2+3x+3}{11}=\frac{3x+5}{11}$$

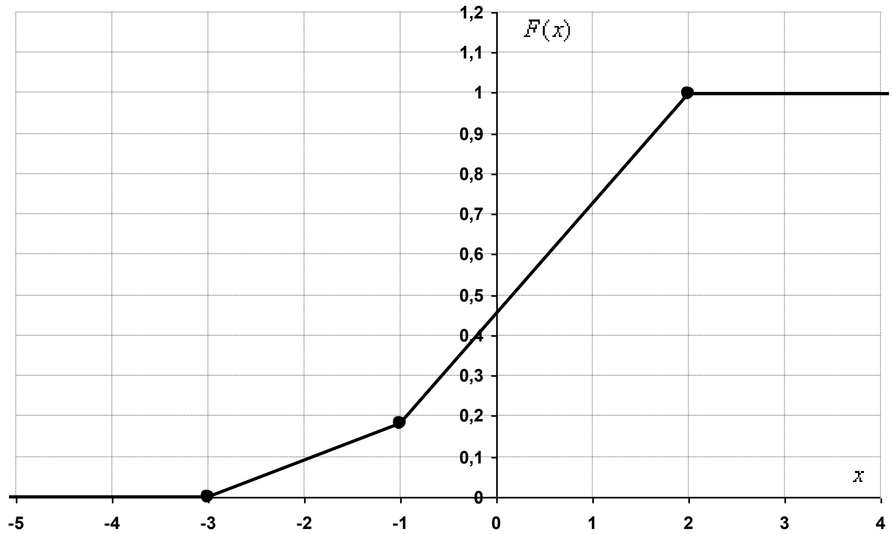
Если $x>2$, то $f(x)=0$,

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-3}0dx+\frac{1}{11}\int\limits_{-3}^{-1}dx+\frac{3}{11}\int\limits_{-1}^{2}dx+\int\limits_{2}^{x}0dx=0+\frac{1}{11}(x)\Big|_{-3}^{-1}+\frac{3}{11}(x)\Big|_{-1}^{2}+0=$$
$$=\frac{1}{11}(-1+3)+\frac{3}{11}(2+1)=\frac{2}{11}+\frac{9}{11}=1$$

Таким образом:

$$F(x)=\begin{cases}0; \quad x\le -3\\ \dfrac{x+3}{11}; \quad -3<x\le -1\\ \dfrac{3x+5}{11}; \quad -1<x\le 2\\ 1; \quad x>2\end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{11}\int_{-3}^{-1}xdx+\frac{3}{11}\int_{-1}^{2}xdx=\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-3}^{-1}+\frac{3}{11}\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-1}^{2}=$$

$$=\frac{1}{22}(1-9)+\frac{3}{22}(4-1)=-\frac{8}{22}+\frac{9}{22}=\frac{1}{22}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\frac{1}{11}\int_{-3}^{-1}x^2dx+\frac{3}{11}\int_{-1}^{2}x^2dx=\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-3}^{-1}+\frac{3}{11}\cdot\frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-1}^{2}=$$

$$=\frac{1}{33}(-1+27)+\frac{1}{11}(8+1)=\frac{26}{33}+\frac{9}{11}=\frac{53}{33}$$

Таким образом:

$$D(X)=\frac{53}{33}-\left(\frac{1}{22}\right)^2=\frac{53}{33}-\frac{1}{484}=\frac{2332-3}{1452}=\frac{2329}{1452}=1\frac{877}{1452}$$

Вычислим $P(-2\le X\le 0)=F(0)-F(-2)=\dfrac{5}{11}-\dfrac{1}{11}=\dfrac{4}{11}$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного отрезка.

Задача 23. Задана непрерывная случайная величина X своей плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} Ax^2, & |x|\le 3 \\ 0, & |x|>3 \end{cases}$$

Требуется:
1) Определить коэффициент A;
2) Найти функцию распределения $F(x)$;
3) Схематично построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;
4) Вычислить математическое ожидание и дисперсию X;
5) Определить вероятность того, что X примет значение из интервала $(a;b)=(1;2)$

Решение:
1) Найдем коэффициент A. По свойству функции плотности распределения:
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. Для данной задачи:

$$A\int\limits_{-3}^{3} x^2dx=1 \Rightarrow A=\frac{1}{\int\limits_{-3}^{3} x^2dx}$$

$$\int\limits_{-3}^{3} x^2dx=2\int\limits_{0}^{3} x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^3=\frac{2}{3}(27-0)=18 \Rightarrow A=\frac{1}{18}$$

Таким образом, искомая функция плотности распределения:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{18}x^2, & |x|\le 3 \\ 0, & |x|>3 \end{cases}$$

2) Найдем функцию распределения $F(x)$.

Если $x<-3$, то $f(x)=0$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dx=0$.

Если $-3\le x\le 3$, то $f(x)=\frac{1}{18}x^2$,

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-3} 0dx+\frac{1}{18}\int\limits_{-3}^{x} x^2dx=0+\frac{1}{18}x^3\Big|_{-3}^{x}=\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}(x^3-(-27))=\frac{1}{54}(x^3+27).$$

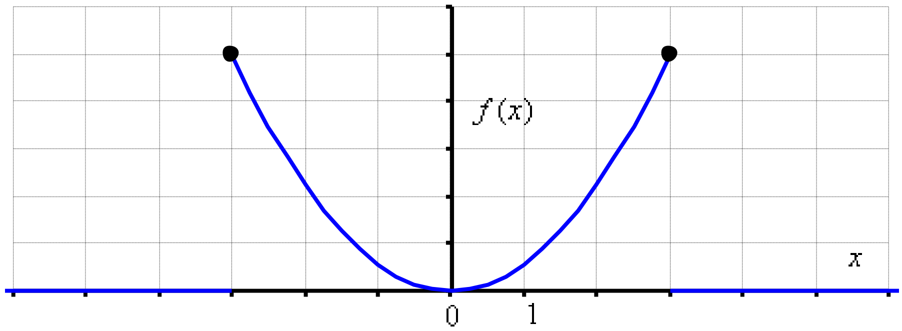
Если $x>3$, то $f(x)=0$,

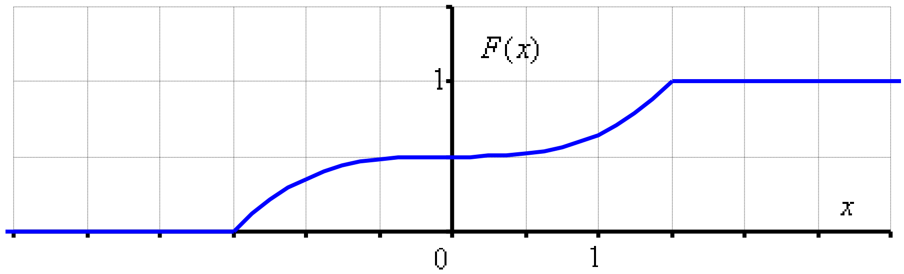
$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-3} 0dx+\frac{1}{18}\int\limits_{-3}^{3} x^2dx+\int\limits_{3}^{x} 0dx=0+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{-3}^{3}+0=\frac{1}{54}(27-(-27))=\frac{1}{54}\cdot 54=1.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-3 \\ \frac{1}{54}(x^3+27), & -3\le x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$

3) Изобразим графики функций $f(x)$ и $F(x)$:





4) Вычислим математическое ожидание:

$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{18}\int_{-3}^{3} x^3dx=0,$ так как подынтегральная функция является нечетной, интервал интегрирования симметричен относительно нуля.

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2=\frac{1}{18}\int_{-3}^{3} x^4dx-0^2=\frac{1}{18}\cdot 2\int_{0}^{3} x^4dx=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5}x^5\Big|_0^3=\frac{243}{45}=\frac{27}{5}=5{,}4$$

5) Найдем вероятность того, что X примет значение из интервала $(a;b)=(1;2)$:

$$P(1<X<2)=F(2)-F(1)=\frac{1}{54}(8+27)-\frac{1}{54}(1+27)=\frac{35}{54}-\frac{28}{54}=\frac{7}{54}\approx 0{,}13$$

Задача 24. Задана плотность распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ Ax^4, & -1\le x\le 1;\\ 0, & x>1\end{cases}$$

Требуется:
1) Определить коэффициент A;
2) Найти функцию распределения $F(x)$;
3) Схематично построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;
4) Найти математическое ожидание и дисперсию X;
5) Найти вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha;\beta)=(0{,}5;1)$

Решение:

1) Найдем коэффициент A. По свойству $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ функции плотности:

$$A\int_{-1}^{1} x^4 dx = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\int_{-1}^{1} x^4 dx = 1}$$

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = 1 = \frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{5}(1-(-1)) = \frac{2}{5} \Rightarrow A = \frac{5}{2}$$

Таким образом, функция плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad x < -1; \\ \frac{5}{2}x^4, \quad -1 \le x \le 1; \\ 0, \quad x > 1 \end{cases}$$

2) Найдем функцию распределения $F(x)$.

Если $x < -1$ то $f(x) = 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$.

Если $-1 \le x \le 1$, то $f(x) = \frac{5}{2}x^4$, $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \frac{5}{2}\int_{-1}^{x} x^4 dx = 0 + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5}x^5 \Big|_{-1}^{x} = \frac{1}{2}(x^5+1)$.

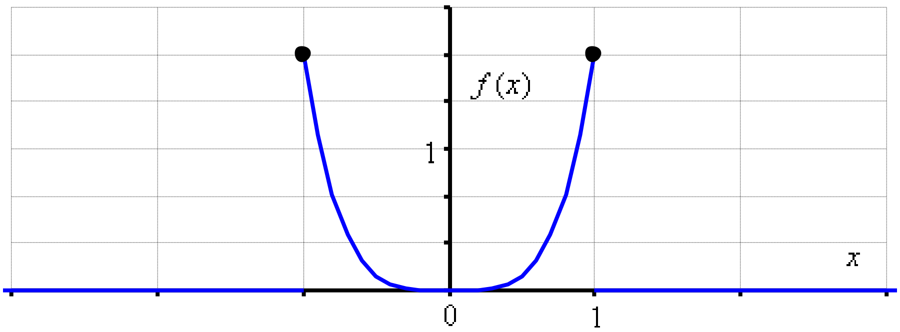
Если $x > 1$ то $f(x) = 0$,

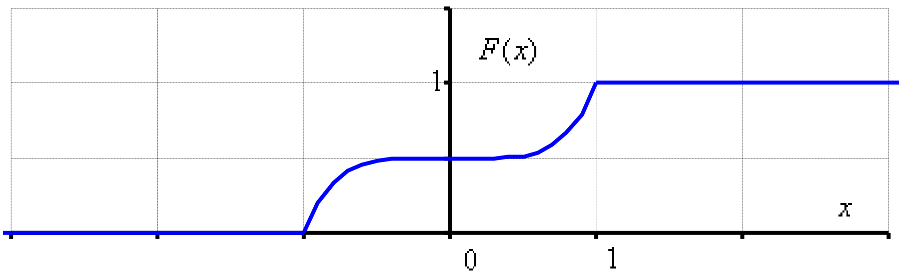
$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} x^4 dx + \int_{1}^{x} 0dx = 0 + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5}x^5 \Big|_{-1}^{1} + 0 = \frac{1}{2}(1-(-1)) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x < -1 \\ \frac{1}{2}(x^5+1), \quad -1 \le x \le 1 \\ 1, \quad x > 1 \end{cases}$$

3) Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$:





4) Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}x\cdot x^4dx=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}x^5dx=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{6}x^6\Big|_{-1}^{1}=\frac{5}{12}(1-1)=0$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(X))^2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}x^2\cdot x^4dx-0^2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}x^6dx=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{7}x^7\Big|_{-1}^{1}=\frac{5}{14}(1+1)=\frac{5}{7}\approx 0{,}71$$

5) Найдем вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha;\beta)=(0{,}5;1)$:

$$P(0{,}5<X<1)=F(1)-F(0{,}5)=\frac{1}{2}(1+1)-\frac{1}{2}\left(0{,}5^5+1\right)=1-0{,}515625=0{,}484375$$

Задача 25. Задана непрерывная случайная величина X своей плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}A\sin 2x, & x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\\ 0, & x\notin\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

Требуется:

1) Определить коэффициент A;
2) Найти функцию распределения $F(x)$;
3) Схематично построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;
4) Вычислить математическое ожидание и дисперсию X;
5) Определить вероятность попадания в интервал $(a;b)=\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$.

Решение:

1) Найдем коэффициент A. По свойству функции плотности распределения: $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$. Для данной задачи:

$$A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx=1\Rightarrow A=\frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}==\Rightarrow-\frac{1}{2}(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{1}{2}(-1-1)=1\Rightarrow A=\frac{1}{1}=1$$

Таким образом, функция плотности:

$$f(x)=\begin{cases}\sin 2x, x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\\ 0, x\notin\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

2) Найдем функцию распределения $F(x)$.

Если $x<0$, то $f(x)=0$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dx=0$.

Если $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, то $f(x)=\sin 2x$,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{x}\sin 2xdx=0-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{0}^{x}=-\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 0)=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\sin^2 x.$$

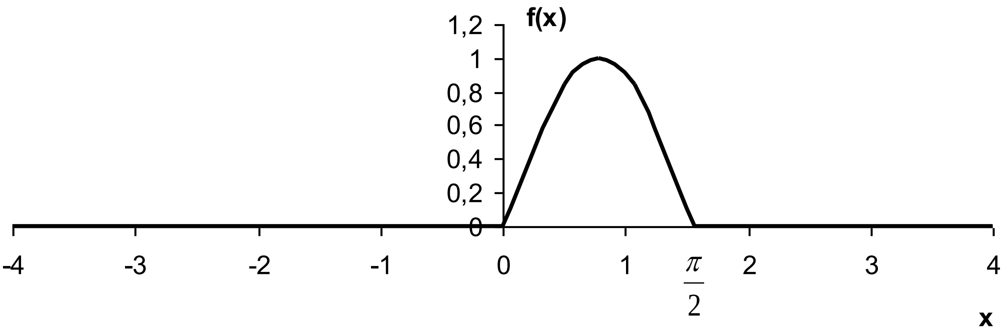
Если $x>\frac{\pi}{2}$, то $f(x)=0$,

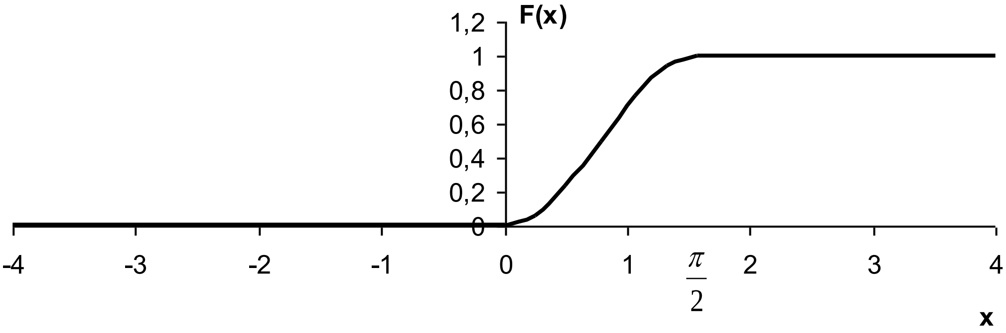
$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}0dx=0-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}+0=-\frac{1}{2}(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{1}{2}(-1-1)=1.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin^2 x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 1, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

3) Изобразим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





4) Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$u=x\Rightarrow du=dx$

$$dv=\sin 2x\Rightarrow v=-\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$(*)=-\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx=-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\cos\pi-0\right)+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+0=\frac{\pi}{4}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin 2xdx=(*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$u=x^2\Rightarrow du=2xdx$

$$dv=\sin 2x\Rightarrow v=-\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$(*)=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x=-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi^2}{4}-0\right)+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x=\frac{\pi^2}{8}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x=(*)$$

$u=x\Rightarrow du=dx$

$$dv=\cos 2xdx\Rightarrow v=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$(*)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx=\frac{\pi^2}{8}+0+\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}(\cos\pi-\cos 0)=$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}(-1-1)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}.$$

Таким образом: $D(X)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}=\frac{\pi^2-8}{16}$

5) Найдем вероятность попадания в интервал $(a;b)=\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$:

$$P\left(-\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{6}\right)=F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin^2\frac{\pi}{6}-0=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Задача 26. Случайная величина X задана функцией плотности распределения вероятностей: $f(x)=\begin{cases}0, & x\le\frac{\pi}{4}\\ -2\cos 2x, & \frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить графики данных функций. Вычислить математическое ожидание и найти $P\left(\frac{\pi}{3}<X<\pi\right)$.

Решение: найдем функцию распределения $F(x)$:

1) Если $x<\frac{\pi}{4}$, то $f(x)=0,\ F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0$.

2) Если $\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{2}$, то $f(x)=-2\cos 2x$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{\frac{\pi}{4}}0dx-2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{x}\cos 2xdx=0-2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{x}=-\left(\sin 2x-\sin\frac{\pi}{2}\right)=1-\sin 2x.$$

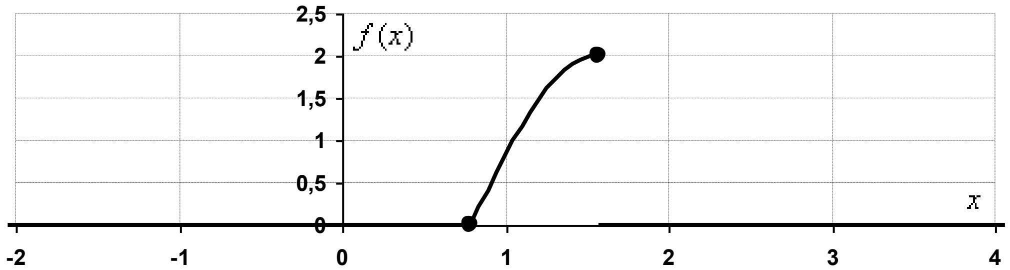
3) Если $x>\frac{\pi}{2}$, то $f(x)=0,$

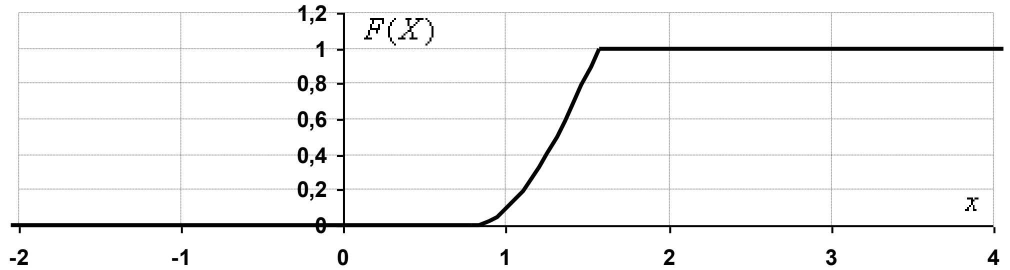
$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{\frac{\pi}{4}}0dx-2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x}0dx=0-2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+0=-\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}(1+1)=1.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le\frac{\pi}{4}\\ 1-\sin 2x, & \frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{2}\\ 1, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Выполним чертежи:





Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = -2\int_{\pi/4}^{\pi/2} x\cos 2x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = -2x \Rightarrow du = -2dx$$

$$dv = \cos 2x \Rightarrow v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$(*) = -(x\sin 2x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2x dx = -\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0 - \frac{\pi}{4}\cdot 1\right) - \frac{1}{2}(\cos 2x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(-1-0) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\pi+2}{4} \approx 1{,}285$$

Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала:

$$P\left(\frac{\pi}{3} < X < \pi\right) = F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \left(1 - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$$

3. Равномерное распределение случайной величины

Задача 27. Все значения равномерно распределенной случайной величины X лежат на отрезке $[2;8]$. Найти вероятность попадания случайной величины X в промежуток $(3;5)$.

Решение: составим функцию плотности распределения вероятностей равномерно распределенной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ \dfrac{1}{(8-2)}, & 2\le x\le 8\\ 0, & x>8\end{cases}=\begin{cases}0, & x<2\\ \dfrac{1}{6}, & 2\le x\le 8\\ 0, & x>8\end{cases}$$

Тогда искомая вероятность:

$$P(3<X<5)=\int_3^5 f(x)dx=\frac{1}{6}\int_3^5 dx=\frac{1}{6}\cdot(x)\Big|_3^5=\frac{1}{6}\cdot(5-3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\approx 0{,}333$$

Ответ: $\frac{1}{3}\approx 0{,}33$

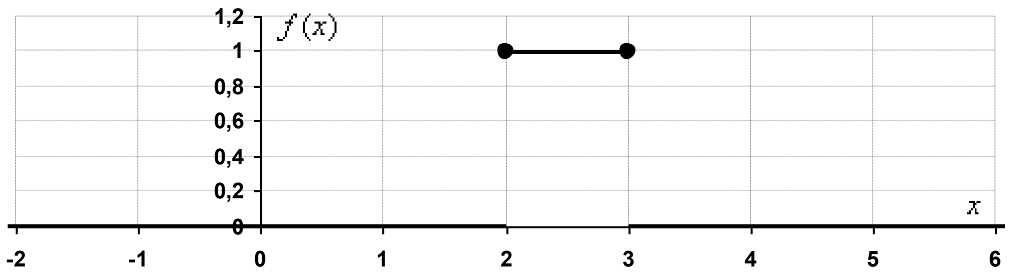
Задача 28. Случайная непрерывная величина X задана своей функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ x-2, & 2\le x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$. Требуется: а) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$; б) схематично построить график функций $f(x)$ и $F(x)$; в) Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$; г) Определить вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha;\beta)=(1;3)$.

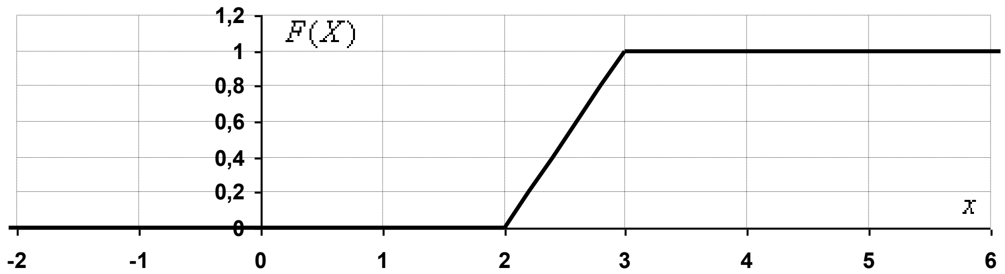
Решение:

а) Найдем плотность распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ 1, & 2\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

б) Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$:





в) Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{2}^{3}xdx=\frac{1}{2}(x^2)\Big|_2^3=\frac{1}{2}(9-4)=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{2}^{3}x^2dx=\frac{1}{3}(x^3)\Big|_2^3=\frac{1}{3}(27-8)=\frac{19}{3}$$

Таким образом:

$$D(X)=\frac{19}{3}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{19}{3}-\frac{25}{4}=\frac{1}{12}$$

г) Найдем вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha;\beta)=(1;3)$.
$P(1<X<3)=F(3)-F(1)=1-0=1$ – искомая вероятность.

Задача 29. Задана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{5}(x+1), & c\le x\le d\\ 1, & x>4\end{cases}$$

Найти значения c, d, плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[0;3]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: в силу непрерывности функции распределения:

$$F(c)=\frac{1}{5}(c+1)=0 \quad\Rightarrow\quad c=-1$$

$$F(d)=\frac{1}{5}(d+1)=1 \quad\Rightarrow\quad d=4$$

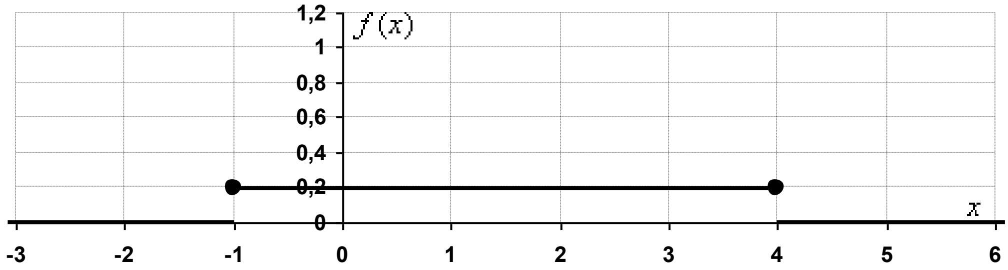
Таким образом:

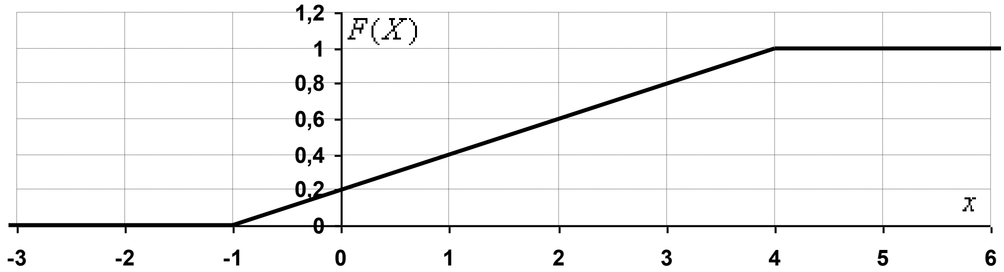
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{5}(x+1), & -1\le x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$$

Найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \dfrac{1}{5}, & -1 \le x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{5}\int_{-1}^{4} xdx = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-1}^{4} = \frac{1}{10}\cdot(16-1) = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(x))^2 = \frac{1}{5}\int_{-1}^{4} x^2 dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-1}^{4} - \frac{9}{4} = \frac{1}{15}(64+1) - \frac{9}{4} = \frac{13}{3} - \frac{9}{4} = \frac{25}{12} \approx 2{,}083$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $[0;3]$:

$$P(0 \le X \le 3) = F(3) - F(0) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$ – искомая вероятность.

Задача 30. Равномерно распределенная непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией (плотностью вероятности):

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{16}, & x\in(-5;11)\\ 0, & x\notin(-5;11)\end{cases}$$

Найти: а) интегральную функцию распределения $F(x)$; б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X; в) $P(-6<x<7)$.

Решение:

а) Найдем функцию распределения $F(x)$:

Если $x\le -5$ то $f(x)=0,\;\; F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0$.

Если $-5<x<11$ то $f(x)=\frac{1}{16}$ и $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\frac{1}{16}\int\limits_{-5}^{x}dx=0+\frac{1}{16}(x)\Big|_{-5}^{x}=\frac{1}{16}(x+5)$

Если $x\ge 11$ то $f(x)=0$,следовательно:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\frac{1}{16}\int\limits_{-5}^{11}dx+\int\limits_{11}^{x}0dx=0+\frac{1}{16}(x)\Big|_{-5}^{11}+0=\frac{1}{16}\cdot(11+5)=\frac{1}{16}\cdot 16=1$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -5\\ \frac{1}{16}(x+5), & -5<x<11\\ 1, & x\ge 11\end{cases}$$

б) Найдем математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{16}\int\limits_{-5}^{11}xdx=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-5}^{11}=\frac{1}{32}\cdot(121-25)=\frac{1}{32}\cdot 96=3$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\frac{1}{16}\int\limits_{-5}^{11}x^2dx=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-5}^{11}=\frac{1}{48}\cdot(1331+125)=\frac{1456}{48}=\frac{91}{3}$$

Таким образом:

$$D(X)=\frac{91}{3}-3^2=\frac{91}{3}-9=\frac{64}{3}=21\frac{1}{3}$$

в) Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала:

$$P(-6<X<7)=F(7)-F(-6)=\frac{1}{16}(7+5)-0=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

Задача 31. Найдите c, $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, $P(0<X<7)$, если плотность распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{c-10}, & x\in[6;9],\\ 0, & x\notin[6;9].\end{cases}$

Решение: функция плотности распределения вероятности обладает свойством $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. В данном случае:

$$\int\limits_6^9 \frac{1}{c-10}=1 \Rightarrow \frac{1}{c-10}(x)\Big|_6^9=1 \Rightarrow \frac{9-6}{c-10}=1 \Rightarrow c-10=3 \Rightarrow c=13$$

Таким образом, функция плотности распределения:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & x\in[6;9],\\ 0, & x\notin[6;9].\end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{3}\int\limits_6^9 xdx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(x^2\right)\Big|_6^9=\frac{1}{6}(81-36)=\frac{1}{6}\cdot 45=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2=\frac{1}{3}\int\limits_6^9 x^2dx-(7{,}5)^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(x^3\right)\Big|_6^9-56{,}25=$$

$$=\frac{(729-216)}{9}-56{,}25=57-56{,}25=0{,}75$$

Найдем функцию распределения $F(x)$:

Если $x<6$, то $f(x)=0$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dx=0$.

Если $6\le x\le 9$, то $f(x)=\dfrac{1}{3}$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{6} 0dx+\dfrac{1}{3}\int\limits_6^x dx=0+\dfrac{1}{3}x\Big|_6^x=\dfrac{x-6}{3}$.

Если $x>9$, то $f(x)=0$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{6} 0dx+\dfrac{1}{3}\int\limits_6^9 dx+\int\limits_9^x 0dx=0+\dfrac{1}{3}x\Big|_6^9+0=\dfrac{1}{3}(9-6)=1$.

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<6\\ \dfrac{x-6}{3}, & 6\le x\le 9\\ 1, & x>9\end{cases}$$

Вычислим вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала:

$$P(0<X<7)=F(7)-F(0)=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}.$$

Задача 32. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(2;8)$. Найти и построить графики функции распределения и плотности распределения равномерной непрерывной случайной величины X.

Решение: составим функцию плотности распределения случайной величины:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{1}{8-2}, & 2<x<8\\ 0, & x\ge 8\end{cases}=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{1}{6}, & 2<x<8\\ 0, & x\ge 8\end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{6}\int_{2}^{8}xdx=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_2^8=\frac{1}{12}(64-4)=\frac{60}{12}=5$$

Вычислим дисперсию:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(x))^2=\frac{1}{6}\int_{2}^{8}x^2dx-5^2=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}(x^3)\Big|_2^8-25=$$

$$=\frac{1}{18}(512-8)-25=\frac{504}{18}-25=28-25=3$$

Найдем функцию распределения $F(x)$:

Если $x\le 2$ то $f(x)=0,\ F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dx=0$

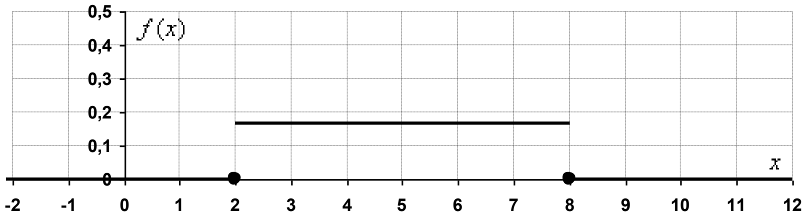
Если $2<x<8$ то $f(x)=\frac{1}{6},\ F(x)=\int_{-\infty}^{2}0dx+\frac{1}{6}\int_{2}^{x}dx=0+\frac{1}{6}(x)\Big|_2^x=\frac{1}{6}(x-2)$.

Если $x\ge 8$, то $f(x)=0,\quad F(x)=\int_{-\infty}^{2}0dx+\frac{1}{8}\int_{2}^{8}dx+\int_{8}^{x}0dx=0+\frac{1}{6}(x)\Big|_2^8+0=\frac{1}{6}(8-2)=1$.

Таким образом:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{1}{6}(x-2), & 2<x<8\\ 1, & x\ge 8\end{cases}$$

Выполним чертежи:



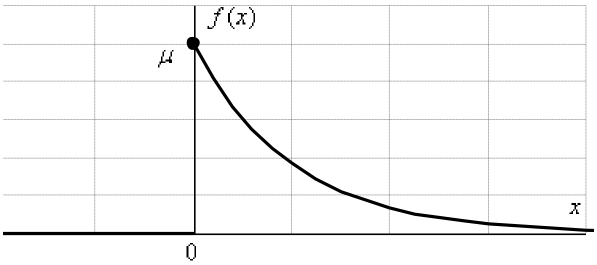
4. Показательное распределение вероятностей

Задача 33. Случайная величина X подчинена показательному закону с параметром μ:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \mu e^{-\mu x}, & x\geq 0\end{cases}$$

Построить кривую распределения. Найти функцию распределения. Найти вероятность того, что случайная величина X примет меньшее значение, чем ее математическое ожидание.

Решение: построим кривую плотности распределения:



Найдем функцию распределения:

Если $x<0$, то $f(x)=0$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0$.

Если $x>0$, то $f(x)=\mu e^{-\mu x}$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\mu\int\limits_{0}^{x}e^{-\mu x}dx=0-\mu\cdot\frac{1}{\mu}(e^{-\mu x})\Big|_0^x=-(e^{-\mu x}-1)=1-e^{-\mu x}$$

Таким образом, функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, \ x<0\\ 1-e^{-\mu x}, \ x\geq 0\end{cases}$$

Вычислим вероятность того, что случайная величина X примет меньшее значение, чем ее математическое ожидание.

Из теории известно, что функция плотности показательного распределения заданная в виде $f(x)=\begin{cases}0, \ x<0\\ \mu e^{-\mu x}, \ x\geq 0\end{cases}$ имеет математическое ожидание $M(x)=\dfrac{1}{\mu}$.

Таким образом:

$$P\left(-\infty<X<\frac{1}{\mu}\right)=F\left(\frac{1}{\mu}\right)-F(0)=1-e^{-\mu\cdot\frac{1}{\mu}}-(1-1)=1-e^{-1}$$ – искомая вероятность.

Ответ: $F(x)=\begin{cases}0, \ x<0\\ 1-e^{-\mu x}, \ x\geq 0\end{cases}$, $P\left(-\infty<X<\dfrac{1}{\mu}\right)=1-e^{-1}\approx 0{,}6321$

Задача 34. Задана непрерывная случайная величина X своей плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Ae^{-2x}, & x\ge 0\end{cases}$$

Требуется:

1) определить коэффициент A;
2) найти функцию распределения $F(x)$;
3) схематично построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;
4) вычислить математическое ожидание и дисперсию X;
5) определить вероятность того, что X примет значение из интервала $(a;b)=(1;+\infty)$.

Решение:

1) Найдем коэффициент A. По свойству функции плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

В данной задаче:

$$A\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx=1\Rightarrow A=\frac{1}{\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx}$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(e^{-2x})\Big|_0^b=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\Big(\underbrace{e^{-2b}}_{\to 0}-e^{0}\Big)=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}\Rightarrow A=2$$

Таким образом, функция плотности распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2e^{-2x}, & x\ge 0\end{cases}$$

2) Найдем функцию распределения $F(x)$.

Если $x<0$, то $f(x)=0$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dx=0$.

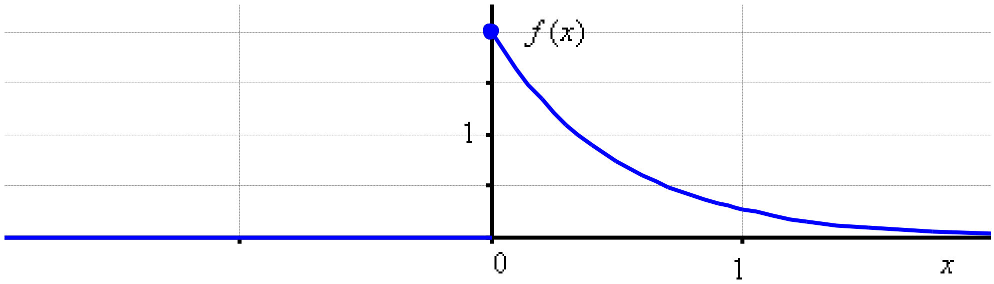
Если $x\ge 0$, то $f(x)=2e^{-2x}$

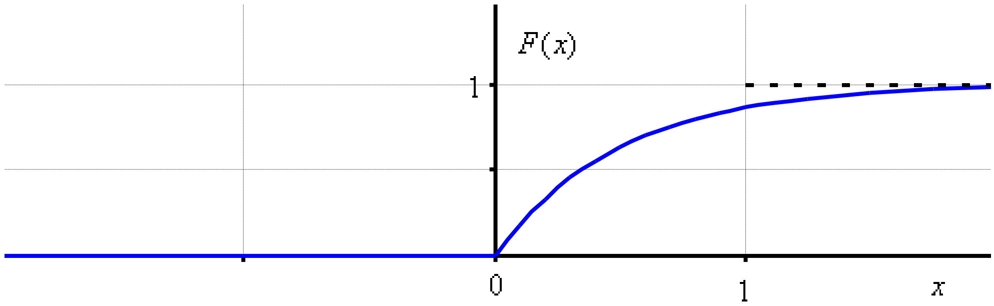
$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dx+2\int_{0}^{x}e^{-2x}dx=0-2\cdot\frac{1}{2}(e^{-2x})\Big|_0^x=-(e^{-2x}-1)=1-e^{-2x}.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-2x}, & x\ge 0\end{cases}$$

3) Построим графики $f(x)$ и $F(x)$:





4) Найдём математическое ожидание и дисперсию.

Способ первый, готовые формулы: из теории известно, что математическое ожидание и дисперсия показательно распределённой случайной величины $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$ равны: $M(x)=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{2}$, $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$.

Способ второй, прямые вычисления.

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=2\int_{0}^{+\infty} xe^{-2x}dx$$

Сначала найдем неопределенный интеграл:

$$2\int xe^{-2x}dx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$$u=x\Rightarrow du=dx$$

$$dv=2e^{-2x}dx\Rightarrow v=-e^{-2x}$$

$$\int udv=uv-\int vdu$$

$$(*)=-xe^{-2x}+\int e^{-2x}dx=-xe^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}=-\frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x}$$

Таким образом, математическое ожидание:

$$M(X)=2\int_{0}^{+\infty} xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left((2x+1)e^{-2x}\right)\Big|_0^b=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{(2b+1)}{e^{2b}}-1\right)=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}$$

($\dfrac{(2b+1)}{e^{2b}}\to 0$ *т.к. показательная функция более высокого порядка роста)*

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=2\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-2x}dx$$

Сначала вычислим неопределенный интеграл:

$$2\int x^2e^{-2x}dx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$$u=x^2\Rightarrow du=2xdx$$

$$dv=2e^{-2x}dx\Rightarrow v=-e^{-2x}$$

$$(*)=-x^2e^{-2x}+2\int xe^{-2x}dx=-x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x}=-\frac{1}{2}(2x^2+2x+1)e^{-2x}$$

Несобственный интеграл:

$$2\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left((2x^2+2x+1)e^{-2x}\right)\Big|_0^b=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{(2b^2+2b+1)}{e^{2b}}-1\right)=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}$$

($\frac{2b^2+2b+1}{e^{2b}}\to 0$ *, так как показательная функция более высокого порядка роста, чем квадратичная)*

Таким образом, дисперсия:

$$D(X)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

5) Вычислим вероятность того, что X примет значение из интервала $(a;b)=(1;+\infty)$

$P(1<X<+\infty)=F(+\infty)-F(1)=1-(1-e^{-2})=e^{-2}\approx 0{,}135$ – искомая вероятность.

5. Нормальное распределение вероятностей

Задача 35. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a=10$ и дисперсией $D(X)=4$. Найти вероятность попадания этой случайной величины на интервал $(12;14)$.

Решение: вычислим среднее квадратическое отклонение: $\sigma=\sqrt{D}=\sqrt{4}=2$
Используем формулу
$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, её значения находим по соответствующей таблице.

В данном случае:
$P(12<X<14)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(1)\approx 0{,}4772-0{,}3413=0{,}1359$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(12;14)$.

Ответ: $P(12<X<14)\approx 0{,}1359$

Задача 36. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $a=2$ и средним квадратическим отклонением $\sigma=0{,}3$. Найти вероятность отклонения случайной величины X от своего математического ожидания по абсолютной величине, меньше, чем 0,4.

Решение: Используем формулу:
$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

В данной задаче:
$P(|X-2|<0{,}4)=2\Phi\left(\frac{0{,}4}{0{,}3}\right)=2\Phi(1{,}33)\approx 2\cdot 0{,}4082=0{,}8165$ – вероятность того, что X отклонится по модулю от своего математического ожидания не более чем на 0,4.

Ответ: $P(|X-2|<0{,}4)\approx 0{,}8165$

Задача 37. Считается, что изделие – высшего качества, если отклонение его размеров от номинальных не превосходит по абсолютной величине 3,6 мм. Случайные отклонения размера изделия от номинального подчиняется нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 3 мм. Систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего качества среди 100 изготовленных.

Решение: рассмотрим случайную величину X – отклонение фактического размера изделия от номинального значения.

По условию, $\sigma=3$, и поскольку систематические отклонения отсутствуют, то математическое ожидание отклонения равно нулю: $a=0$

Используем формулу:

$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа

В данном случае $\delta=3{,}6$:

$P(|X|<3{,}6)=2\Phi\left(\frac{3{,}6}{3}\right)=2\Phi(1{,}2)\approx 2\cdot 0{,}3849=0{,}7699\approx 0{,}77$ –вероятность того, что изделие – высшего качества.

Таким образом, среднее число изделий высшего качества среди 100 изготовленных: $0{,}77\cdot 100=77$

Ответ: 77

Задача 38. Заданы математическое ожидание $m=9$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma=3$ нормально распределенной случайной величины X. Найти:

1) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)=(9;18)$;

2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|x-m|$ окажется меньше $\delta=6$.

Решение:

1) Найдем вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha;\beta)=(9;18)$

Используем формулу:

$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, значения данной функции находим по соответствующей таблице.

В данном случае:

$P(9<X<18)\approx\Phi\left(\frac{18-9}{3}\right)-\Phi\left(\frac{9-9}{3}\right)=\Phi(3)-\Phi(0)\approx 0{,}4987-0=0{,}4987$ – искомая вероятность.

2) Используем формулу:

$P(|X-m|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

В данном случае:

$P(|X-9|<6)=2\Phi\left(\frac{6}{3}\right)=2\Phi(2)\approx 2\cdot 0{,}47725=0{,}9545$ – вероятность того, что значение X отклонится по модулю от $m=9$ не более чем на $\delta=6$.

Ответ: 1) $\approx 0{,}4987$ 2) $\approx 0{,}9545$

Задача 39. Написать функцию плотности нормального распределения случайной величины X, если известно, что $M(X)=2$ и $D(X)=5$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(1;7)$

Решение: функция плотности случайной величины, распределенной по нормальному закону, имеет вид:

$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение. В данном случае:

$$a=M(X)=2,\ \sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{5}$$

Таким образом, искомая функция:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{10\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{10}}$$

Найдем вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(1;7)$. Используем формулу:

$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

В данном случае:

$$P(1<X<7)=\Phi\left(\frac{7-2}{\sqrt{5}}\right)-\Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{5}}\right)=\Phi(2{,}24)-\Phi(-0{,}45)=\Phi(2{,}24)+\Phi(0{,}45)\approx$$

$\approx 0{,}4875+0{,}1736=0{,}6611$ – искомая вероятность.

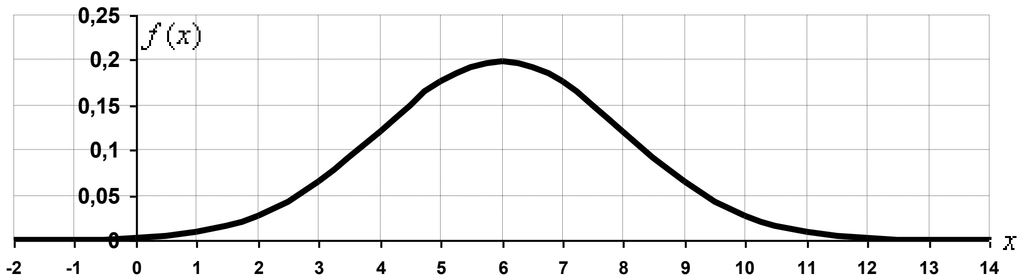
Задача 40. Заданы математическое ожидание $a=6$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma=2$ нормально распределенной случайной величины X. Написать плотность распределения вероятностей и схематично построить ее график. Применяя правило «трех сигм», найти значения случайной величины X.

Решение: функция плотности распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону, имеет вид: $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение.

В данной задаче:

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-6)^2}{8}}$$

Выполним чертёж:



Практически достоверным является тот факт, что случайная величина X примет значение, которое отклоняется по модулю от математического ожидания, не более чем на 3σ. Соответствующий интервал значений случайной величины:

$$a-3\sigma < X < a+3\sigma$$
$$6-3\cdot 2 < X < 6+3\cdot 2$$
$$0 < X < 12$$

Задача 41. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ^2. Найти эти параметры, если известно, что вероятности $P(X<1)=0{,}5$ и $P(-2<X<4)=0{,}9973$.

Решение: график нормально распределенной случайной величины симметричен относительно своего математического ожидания, и справедливыми являются вероятности: $P(X<a)=0{,}5$ и $P(X>a)=0{,}5$.

В данном случае $P(X<1)=0{,}5$, таким образом, $a=1$

Согласно правилу трёх сигм: $P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=0{,}9973$

В данном случае:

$$P(a-3\sigma < X < a+3\sigma)=0{,}9973$$
$$P(1-3\sigma < X < 1+3\sigma)=0{,}9973$$
$$1-3\sigma=-2$$
$$1+3\sigma=4$$

Таким образом: $\sigma=1$

Ответ: $a=1$, $\sigma^2=1$

Задача 42. Плотность вероятности случайной величины имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{18\pi}}e^{\frac{-x^2+4x-4}{18}}$$

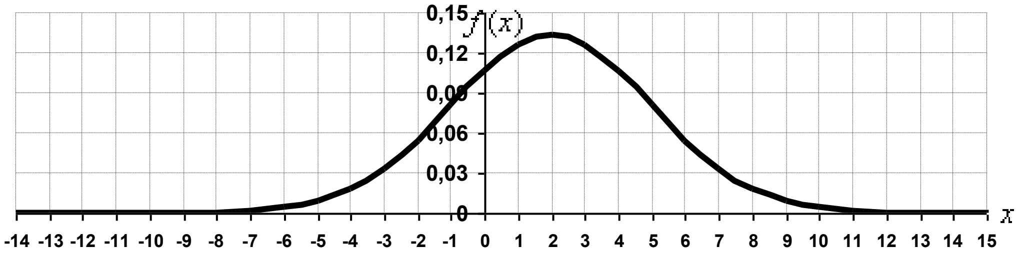
Найти ее математическое ожидание, дисперсию, построить кривую вероятности. Найти вероятности событий: A – случайная величина примет только отрицательные значения, B – случайная величина попадет в интервал длиной в три средних квадратических отклонения, симметричный относительно математического ожидания.

Решение: преобразуем функцию плотности распределения:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{9\cdot 2\pi}}e^{-\frac{x^2-4x+4}{2\cdot 9}}=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot 3^2}}$$

Данная функция имеет вид $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, а значит, случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $a=2$ и средним квадратическим отклонением $\sigma=3$.

Выполним чертеж:



Найдем вероятность события A – случайная величина примет только отрицательные значения. Используем формулу $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$ и таблицу значений функции Лапласа:

$$P(A) = P(-\infty < X < 0) = \Phi\left(\frac{0-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - 2}{3}\right) = \Phi(-0,67) - \Phi(-\infty) =$$

$$= -\Phi(0,67) + \Phi(\infty) \approx -0,2486 + 0,5 = 0,2514$$

Найдем вероятность события B – случайная величина попадет в интервал длиной в три средних квадратических отклонения, симметричный относительно математического ожидания:

$$P(B) = P(2 - 3\cdot 3 < X < 2 + 3\cdot 3) = P(-7 < X < 11) = \Phi\left(\frac{11-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-7-2}{3}\right) =$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) + \Phi(3) = 2\Phi(3) \approx 2\cdot 0,4987 = 0,9973$$

Ответ: $a = 2, \quad \sigma^2 = 9, \quad P(A) \approx 0,2514, \quad P(B) \approx 0,9973$

Задача 43. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $f(x) = \gamma e^{-4x^2 - 6x - 1}$. Найти γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения случайной величины X, вероятность выполнения неравенства $-\frac{3}{4} \le X \le \frac{1}{4}$.

Решение: преобразуем показатель функции:

$$-4x^2 - 6x - 1 = -4\left(x^2 + 2\cdot\frac{3}{4}x + \frac{9}{16}\right) - 1 + \frac{9}{4} = -4\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{4} = -\frac{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{5}{4}$$

Таким образом, функция плотности приводима к виду $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, а значит, случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ.

В данном случае:

$$f(x)=\gamma e^{-4x^2-6x-1}=\gamma e^{-\frac{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{5}{4}}=\gamma e^{\frac{5}{4}}e^{-\frac{\left(x-\left(-\frac{3}{4}\right)\right)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}}$$

Очевидно, что $M(X)=-\frac{3}{4}$ и $D(X)=\sigma^2=\frac{1}{8}$.

Найдём значение параметра γ:

$\gamma e^{\frac{5}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2\pi}}\Rightarrow\gamma=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{5}{4}}$, таким образом, функция плотности:

$$f(x)=\gamma e^{\frac{5}{4}}e^{-\frac{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{5}{4}}\cdot e^{\frac{5}{4}}e^{-\frac{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}}$$

Запишем функцию распределения вероятностей:

$$F(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{5}{4}}\int_{-\infty}^{x}e^{-4x^2-6x-1}dx.$$

Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала. Используем формулу:

$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, её значения найдём по соответствующей таблице.

В данном случае:

$$P\left(-\frac{3}{4}\le X\le\frac{1}{4}\right)=\Phi\left(\frac{\frac{1}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)-\Phi\left(\frac{-\frac{3}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)=\Phi(2\sqrt{2})-\Phi(0)\approx 0{,}4977-0=0{,}4977$$

– вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала.

Ответ: $\gamma=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{5}{4}}$, $M(X)=-\frac{3}{4}$, $D(X)=\frac{1}{8}$, $F(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{5}{4}}\int_{-\infty}^{x}e^{-4x^2-6x-1}dx$, $P\left(-\frac{3}{4}\le X\le\frac{1}{4}\right)\approx 0{,}4977$.